SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

Q
54
N23
ser.4
v.21-22
1954-55

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XXI. — (Anno XCIII)

gennaio - dicembre 1954

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22-568
1954

Pubblicato il 31 gennaio 1955

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

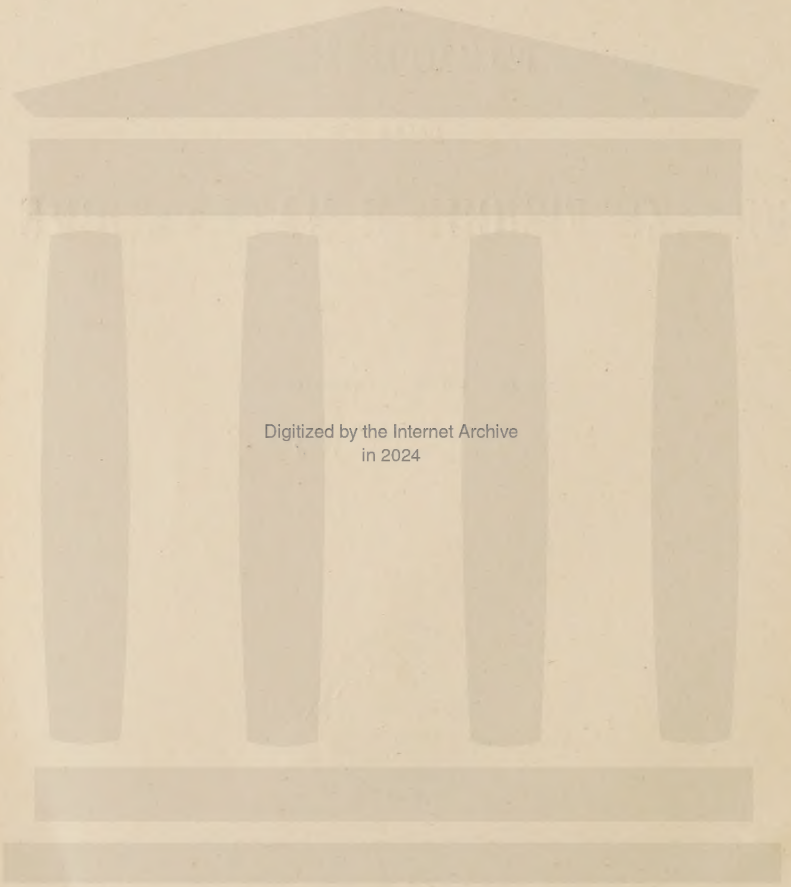
DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XXI. — (Anno XCIII)

gennaio - dicembre 1954

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22-568
1954



Digitized by the Internet Archive
in 2024

https://archive.org/details/accademia-delle-scienze-fisiche-e-matematiche-rendiconto_january-december-1954_21

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI

DALL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DURANTE L' ANNO 1953

letta nell' adunanza plenaria del dì 31 gennaio 1954

dal socio segretario **Geremia D' Erasmo**

Col ritmo degli anni precedenti, divenuto ormai abituale e costante, l' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche ha, nel 1953, contribuito al progresso delle discipline che rientrano nella sua orbita, pubblicando non meno di trentacinque lavori di soci e di estranei raccolti in un nuovo volume del *Rendiconto* — il ventesimo della serie quarta — oltre ad una voluminosa memoria inserita nel volume in corso degli Atti — il terzo della serie terza.

Questa non rallentata attività, che ci è stata facilitata da un assegno straordinario del Ministero dell' Istruzione concesso alla Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di Napoli e da un particolare contributo che l' Ente per la cellulosa e la carta riserva alle pubblicazioni periodiche di elevato valore culturale, ha riguardato tanto le scienze matematiche, quanto quelle fisiche e naturali.

Iniziando, come di consueto, il mio breve e disadorno riassunto di tale attività scientifica con le matematiche pure, devo anzitutto ricordare, nel campo della geometria, sei note, quattro delle quali dovute al consocio SPAMPINATO.

La prima di esse, *Varietà determinata da una coppia ordinaria di ipersuperficie dell'* S_r *complesso,* si riferisce allo studio di due ipersuperficie dell' S_{2r+1} complesso, che vengono dette *concatenate,* e la loro V_{2r-1} intersezione, determinata da una *coppia ordinata* di forme in $r + 1$ variabili complesse di cui la prima non identicamente nulla. Nella seconda, *Le falde t-dimensionali analitiche, algebriche ed unirazionali di un* S_r *supercomplesso,* si estendono ad un S_r supercomplesso le nozioni fondamentali relative alle falde dell' S_r complesso. La terza inizia lo studio delle *Singolarità degli zeri di una funzione supercomplessa* $F(\mu)$, totalmente derivabile, nel caso che si tratti di una funzione razionale intera biduale. E l' ultima, che fa sèguito alle precedenti dieci note su le *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice n dell'* S_r *proiettivo complesso,* si può considerare quale undecimo contributo, nel quale si introduce la determinazione birazionale inviluppo di una varietà algebrica.

Un' altra ricerca, nel medesimo campo d' indagini, è stata effettuata dal dott. Pio Balsimelli, il quale studia, in una nota, la *Trasformazione birazionale dell'* S_5 *complesso dedotta da una trasformazione quadratica biduale,* determina e caratterizza i sistemi lineari di ipersuperficie ad essa legati, gli enti omologhi degli spazi fondamentali nel campo biduale ed i corrispondenti nello S_5 complesso. Ed una sesta nota è dovuta al dr. Angelo Fadini, il quale studia *una trasformazione cremoniana dell'* S_8 *dedotta da una trasformazione quadratica dell'* S_2 *triduale avente i tre punti eccezionali coincidenti,* ne determina gli spazi eccezionali e ne caratterizza i due sistemi lineari di ipersuperfici omologhi dei sistemi omaloidici di iperpiani.

Fra le ricerche di meccanica razionale vanno citate due note del dr. Luigi Salvadori. Nella prima di esse, *Sulla stabilità dei moti merostatici di particolari sistemi anolonomi,* vengono forniti criteri di stabilità e di instabilità per i moti merostatici di una particolare classe di sistemi anolonomi, esaminando, a titolo d' esempio, la stabilità del puro rotolamento di un disco su una superficie sferica sotto l' azione di una forza centrale. Nella seconda, *Un' osservazione su di un criterio di stabilità del Routh,* si osserva che una limitazione sul carattere della stabilità dei moti merostatici di un sistema olonomo a coordinate ignorabili, contenuta in un criterio del Routh, non è essenziale.

Non meno di sette lavori si riferiscono alla scienza delle costruzioni. Di tre note, che sono dovute al prof. Vincenzo Franciosi, la prima, la quale riguarda *Considerazioni sugli archi tipo Boussiron—La Vallette,* studia i limiti entro i quali la profilatura con momenti d' inerzia crescenti dalle imposte alla chiave vale a ridurre gli effetti statici del ritiro, delle variazioni termiche e dell' accorciamento per sforzo assiale in un arco incastrato; la seconda, che esamina *Il carico di punta critico in regime elastoplastico,* stabilisce attraverso un procedimento rigoroso l' equazione differenziale che regge questo fenomeno (equazione del secondo ordine, con coefficienti funzioni della funzione incognita) e determina il primo punto di diramazione ad essa connesso come primo autovalore di una equazione differenziale a coefficienti costanti; la terza, che riflette *Il principio di equivalenza nelle strutture monodimensionali soggette a distorsioni concentrate,* definisce le tre caratteristiche di una distorsione concentrata in una struttura monodimensionale, dimostrando come gli effetti statici di essa dipendano soltanto dalle caratteristiche della distorsione e non dall' effettiva distribuzione degli spostamenti relativi nella sezione.

Una nota del dr. Tullio Renzulli ricerca *Le sollecitazioni di origine termica di un ponte Maillart* attraverso la conoscenza delle linee di influenza di coazioni, riportando un esempio concreto; una del prof. Franco Mazzarella, *Estensione della analogia di Mohr alle travi sottili caricate assialmente,* espone un metodo per determinare la deformata di una trave

sottile caricata assialmente e da forze trasversali, in analogia col noto teorema di Mohr, e spiega come il metodo possa utilizzarsi per la determinazione dei carichi critici; un' altra dell' ing. Michele Pagano, *Contributo al calcolo delle volte a vela e delle volte di traslazione,* tende ad eliminare la eccessiva laboriosità degli abituali metodi di calcolo per queste volte, che la moderna tecnica del cemento armato suggerisce per le coperture di grandi ambienti a pianta quadrata o rettangolare, proponendo formule approssimate per le condizioni di carico di peso proprio e accidentale uniforme; ed un' ultima nota, dei dott. Aldo Raithel e Aldo Ambrosanio, *Sulla determinazione delle sollecitazioni massime nei sistemi ad alto grado di iperstaticità,* dopo aver rilevato le difficoltà applicative che presenta la determinazione dei massimi e dei minimi delle caratteristiche della sollecitazione nei sistemi solidali, espone un metodo di calcolo che ne permette la valutazione in modo rapido e sintetico.

Al campo delle indagini chimiche e chimico-fisiche si riferiscono alcune altre note. Una, dovuta alla collaborazione dei dott. Liliana Jannelli, Paolo Giordano Orsini e Giorgio Daniele, espone i risultati di misure di densità, di indice di rifrazione e di costante dielettrica eseguite sopra soluzioni di acido p-aminosalicilico in diossano, con lo scopo di giungere, attraverso i più esatti metodi di estrapolazione, al calcolo della polarizzazione molecolare limite del soluto e quindi del *Momento elettrico* dipolare *dell' acido p-amminosalicilico,* non ancora conosciuto. Un' altra nota, dei dott. Rodolfo Nicolaus e Paolo Giordano Orsini, tratta di *Ricerche nel campo degli indicatori azoici.* Gli autori hanno preparato ed esaminato due serie di coloranti azoici derivati dal 4'-nitro-3-metil-4-ossi-azobenzolo e dal 2',4'-nitro-3-metil-4-ossi-azobenzolo, con gruppi alchilici sostituiti, nonchè alcuni prodotti analoghi derivati dal timolo e dal carvacrolo. Essi se ne sono serviti per portare un contributo sistematico allo studio della influenza della struttura sulla qualità degli indicatori, fornendo contemporaneamente una nuova famiglia di indicatori, utili per le misure nella zona alcalina, e con punti di semiviraggio che vanno da pH=8,2 fino a pH=11,4. Un terzo lavoro, presentato dal dott. Giuseppe Parravano, tratta della *Formazione di atomi e radicali liberi durante la corrosione dei metalli.* Riferendosi alle ricerche, che si compiono per conoscere le proprietà chimico-fisiche di superfici metalliche appena formate, e facendo uso di reazioni di polimerizzazione a catena di un monomero olefinico, egli ha potuto dimostrare che si hanno, nella fase liquida circostante, processi di trasferimento di elettroni con la conseguente formazione di atomi o di radicali liberi.

Di particolari problemi di chimica industriale trattano due note del prof. Riccardo Sersale. Una di esse espone i risultati dell' *Esame microscopico di refrattari cromo-magnesiaci, in sezione sottile e in sezione lucida,* traendone deduzioni di notevole interesse per il controllo ed il mi-

glioramento della produzione di quei materiali; l' altra, che si riferisce ad *Indagini sul comportamento termico delle rocce calcaree,* esamina il comportamento termo dilatometrico di numerosi tipi di roccia calcarea di differente tessitura, e, dopo averne posta in evidenza la notevole dilatabilità, anche a temperature relativamente basse, ed il suo rapido incremento in vicinanza della temperatura di decarbonatazione, dà una interpretazione dei fenomeni osservati, che appaiono in stretto rapporto con la varia struttura delle rocce esaminate.

Parecchi lavori si devono pure ricordare nel settore della fisica terrestre e della meteorologia. In occasione dell' eclisse solare del 25 febbraio 1952, furono oggetto di particolare ricerca, nell' Istituto di fisica terrestre di Napoli, la radiazione solare e la elettricità atmosferica, e nell' Osservatorio Vesuviano la luminosità del cielo e il grado di polarizzazione della luce. Di tali indagini hanno esposto i risultati, in quattro distinte note, il dott. Pio Vittozzi per la *radiazione solare diretta, globale e diffusa,* il dott. Luigi Accardi per le *misure di campo elettrico atmosferico,* il dott. Lorenzo Casertano per le *misure di luminosità del cielo* e lo stesso dott. Casertano per *il grado di polarizzazione della luce del cielo,* mettendo in risalto l' influenza dell' eclisse su tutti questi elementi meteorologici.

Altre due note contribuiscono alla conoscenza più precisa del clima di Napoli. Una, dovuta al prof. Eugenio Guerrieri, tratta dell' *Abbondanza e deficienza di pioggia dal 1949 al 1951* e delle *Temperature straordinarie nella estate del 1952,* rilevando alcune anomalie nelle condizioni climatologiche, che rappresentano scostamenti dai valori statistici medi, secondo misure eseguite all' Osservatorio di Capodimonte. L' altra nota, del dott. Cristofaro Mennella, indaga su *Andamento annuale medio e andamento reale della pioggia a Napoli,* prendendo in esame i dati della quantità e della frequenza della pioggia caduta nella nostra città nel periodo 1866-1945 e rilevando alcune notevoli differenze nell' andamento della piovosità tra i valori dell' intero ottantennio e quello di periodi minori pur compresi nell' ottantennio stesso.

Anche nel campo delle osservazioni geologiche e geochimiche il Rendiconto ha accolto contributi diversi. Una nota del prof. Antonio Lazzari espone i *Primi risultati dell' indagine della geofisica con il metodo sismico a riflessione nella Piana di Catania,* i quali appaiono di notevole interesse geologico e pratico, dimostrando che le condizioni tettoniche di quella zona, finora variamente interpretate dai geologi, sono normali. Infatti, le serie stratigrafiche capaci di dare ottime riflessioni si sviluppano fino a profondità di circa 2000 m., mostrando di essersi sedimentate in posto e di non avere quindi partecipato passivamente a quei grandiosi movimenti di scivolamento gravitativo voluti da alcune recenti teorie sulla tettonica siciliana. Un' altra nota, del medesimo autore, riguarda una *Nuova ipotesi per una interpretazione strutturale della Sicilia.* Esposta la

teoria formulata da precedenti studiosi sulla traslazione gravitativa delle argille scagliose in Sicilia e riassunte le obbiezioni che ad essa possono muoversi, il Lazzari formula un' altra ipotesi, la quale spiegherebbe la situazione geotettonica siciliana riconducendola ad un normale bacino di sedimentazione geosinclinalico, paleogenico, i cui depositi marginali (flysch) e profondi (argille scagliose tipiche) avrebbero poi subìto quel complesso di sollecitazioni tettoniche che li avrebbero portati ad assumere le attuali condizioni di giacitura. Un terzo lavoro, spettante al dott. Vincenzo Minieri, riguarda *Osservazioni geochimiche sulle arenarie glauconitiche di Punta Lagno nella penisola di Sorrento* ed esamina la genesi della glauconite in quel particolare bacino di sedimentazione, ammettendo che il minerale dovette formarsi per reazioni in posto di natura biochimica.

Passando ora al settore delle discipline biologiche, citerò anzitutto una ampia memoria dal titolo *Ricerche istofisiologiche e morfologiche e annotazioni storiche e critiche*, accompagnata da una tavola a colori, che è stata inserita nel volume in corso degli Atti. Essa è dovuta al consocio Vincenzo Diamare e tratta, in separati capitoli, di organi molteplici (tessuto specifico nel cuore, capsule surrenali e loro equivalenti, tessuto interstiziale delle gonadi, epifisi cerebrale, cellule delle isole di Langerhans del pancreas, nervo cocleare nel vestibolo dell' uomo, struttura della fibra nervosa ecc.), riferendo su ricerche nuove e riprendendo altre precedenti dell' A. in relazione a studi e lavori che meritavano rettifiche o considerazioni critiche o più ampia discussione dei risultati.

Osservazioni e considerazioni su recenti studi di simbiologia sperimentale ha esposte, in una nota, il socio Umberto Pierantoni. Prendendo argomento dal recente simposio tenutosi ad Amsterdam, in occasione del IX Congresso internazionale di Entomologia, sulla simbiosi degli insetti coi microrganismi, e da alcune discussioni ivi avvenute sulla possibilità della digestione del legno e della cellulosa da parte dei protozoi ospitati dallo intestino delle termiti, egli pone in evidenza alcuni risultati di precedenti sue osservazioni personali, le quali dimostrano come a tale digestione concorrano organelli simbiotici dei protozoi, che compiono coi loro microrganismi l' idrolizzazione e quindi la solubilizzazione di quei resistenti idrati di carbonio, rendendone possibile l' assimilazione da parte dell' insetto. Rivendica poi alla scuola zoologica napoletana la priorità degli studi sulla simbiosi fisiologica, specialmente per quanto riguarda l' elaborazione delle vitamine del gruppo B.

Si giunge così ai vari contributi di scienza e di dottrina, che il decano dei nostri colleghi, Giuseppe De Lorenzo — da cinquanta anni socio ordinario residente, mirabile esempio di feconda ininterrotta attività di studio e di continuato devoto attaccamento a questo nostro Sodalizio — ha offerti anche quest' anno, al pari di tutti i precedenti, al Rendiconto accademico.

Delle quattro note da lui presentate, una, dal titolo *Scienza d' Occidente e sapienza d' Oriente*, espone — in continuazione di argomenti già svolti in note precedenti — i risultati ottenuti nello studio delle dottrine e delle opere di antichi e moderni grandi pensatori, facendo rilevare le congruenze e le simiglianze fra i grandi e precisi risultati della moderna scienza d' Occidente e le profonde e geniali intuizioni dell' antica sapienza d' Oriente. — Un' altra nota, che riguarda *Kant e la geografia fisica*, è destinata a mettere particolarmente in luce i molteplici e geniali contributi, che per oltre mezzo secolo Emanuele KANT fornì allo studio ed all' insegnamento della geografia fisica: a cominciare dal 1747, quando appena ventitreenne pubblicò i suoi pensieri sulla vera valutazione delle forze vive, fino al 1802, cioè fin quasi alla soglia della morte, quando fece raccogliere al suo discepolo F. T. RINK tutti gli appunti delle sue lezioni di questa scienza. — La terza nota, che si ricollega alla precedente, tratta de *I vulcani della Luna*, argomento sul quale il filosofo tedesco aveva nel 1785 scritto un lavoro, che per i suoi concetti specifici concorda ancor oggi, dopo più di un secolo e mezzo, con i risultati delle moderne osservazioni e ricerche selenologiche e selenogeniche. — Nel quarto lavoro, infine, che ha per titolo *Sulla intelligenza degli animali*, si indaga, sulla scorta di testimonianze storiche, letterarie e filosofiche, in quali circostanze di tempo e di luogo sia sorta, nel mondo antico e moderno, tra gli occidentali e gli orientali, la disparità di opinione sulla presenza o l' assenza di intelligenza negli animali; e si conclude che gli animali sono, per l' intelligenza, solo quantitativamente, non qualitativamente, differenti dagli uomini.

Fra le brevi comunicazioni verbali, con cui alcuni soci hanno voluto richiamare l' attenzione dei colleghi su particolari questioni scientifiche o problemi di attualità, cade quì opportuno segnalare l' osservazione dello stesso consocio DE LORENZO sul cosidetto *raggio verde* del sole al tramonto; il quale da alcuni fisici è riportato alle diverse lunghezze d' onda dei raggi solari al tramonto. Secondo il DE LORENZO, invece, si tratta di un fenomeno non fisico, ma fisiologico: perchè l' estremo lembo del sole, quando tramonta sull' aperto mare, se è intensamente rosso, appena sparisce, fa apparire al suo posto una rapida luminosità verde, e, se è giallo, una luminosità azzurra. Si tratta, cioè, dei colori complementari, verde ed azzurro, che si producono sulla rètina al posto del rosso e del giallo. Tale spiegazione fisiologica, patrocinata dal nostro consocio, è stata ritenuta molto più probabile ed efficiente di quella fisica, anche da altri studiosi, interpellati al riguardo.

Non sono mancate altre manifestazioni di attività (adesione alla celebrazione centenaria della nascita di Henri POINCARÉ a Parigi, al Congresso

internazionale dei Matematici di Amsterdam, al Congresso di Etnografia e Folklore del mare a Napoli, ecc.), e sono stati accresciuti, con nuovi scambi di pubblicazioni, i rapporti con numerose Accademie e Società scientifiche di ogni parte del mondo. Può essere assai dimostrativo, a tale riguardo, il ben nutrito elenco di pubblicazioni periodiche stampate in fine del nostro *Annuario 1954*, che ha testè vista la luce. Così, a dieci anni appena dalla fine della guerra, l' Accademia ha contribuito assai efficemente, con le sue Consorelle alla ricostituzione del comune patrimonio librario pressochè totalmente distrutto dall' incendio del settembre 1943, e si è potuto soddisfare il desiderio degli studiosi riaprendo le sale della Biblioteca, ordinate e non più semivuote.

Se questa constatazione può riempire di legittimo orgoglio l' animo nostro, una nota dolorosa ci stringe il cuore quando constatiamo che ad ogni anno che passa qualche nobile e cara figura è scomparsa.

Nel 1953 abbiamo avuto — con notevole ritardo — l' annunzio della morte del prof. Jacques Charles Émile Jouguet, matematico insigne già appartenente alla Scuola Politecnica di Parigi, nostro socio straniero dal 16 dicembre 1938; ed il 24 agosto scorso si è spento immaturamente in Napoli, appena quarantasettenne, il prof. Attilio Colacevich, direttore dell' Osservatorio astronomico di Capodimonte e nostro socio corrispondente, nella sezione di scienze matematiche, dal 2 giugno 1951. Della sua breve ma brillante carriera — percorsa principalmente presso l' Osservatorio astrofisico di Arcetri, la Stazione astronomica di Carloforte e l' Osservatorio astronomico di Napoli —, nonchè della sua feconda attività scientifica, svolta prevalentemente nei campi della più moderna astrofisica, e della singolare perizia didattica, hanno già degnamente tenuto parola il consocio Vittorio Nobile, che ne tracciò un efficace profilo nell' adunanza dello scorso novembre, ed il prof. Tito Nicolini, il quale ne lesse una più ampia commemorazione nella successiva tornata del dicembre. Ma chi oggi vi parla sente di dovere quì mettere in particolare rilievo l' attaccamento dimostrato da Attilio Colacevich a questo Sodalizio con i contributi offerti al Rendiconto accademico, ed è sicuro di interpretare l' unanime sentimento dei colleghi inviando alla cara memoria di Lui il mesto omaggio del nostro vivo ed accorato rimpianto.

Durante il 1953 non vi furono altre variazioni nella compagine dei soci, se si eccettui il passaggio del prof. Guido Zappa — per l' avvenuto suo trasferimento a Firenze — dalla categoria dei soci ordinari residenti a quella dei soci non residenti. Fu provveduto alla votazione per il vice-presidente del 1954, eleggendo a voti unanimi il prof. Vincenzo Diamare, e fu bandito, fin dallo scorso gennaio, il secondo concorso al premio biennale di L. 50.000 sul tema, proposto dalla Sezione di Scienze matematiche: « *Contributo allo studio dei gruppi o delle algebre dal punto di vista della teoria dei reticoli* », con scadenza al 30 ottobre 1954.

Su alcune varietà dell'S_{11} determinate dall'algebra triduale come sottoalgebra dell'algebra dei numeri doppio-biduali

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 6 marzo 1954)

Sunto. -- Assegnato un modello proiettivo dell'ente algebrico ∞^1, irriducibile, con una curva algebrica c^n del piano complesso, irriducibile, di ordine n e classe m, si costruisce un nuovo modello proiettivo di tale ente algebrico, con ∞^1 S_5, costituenti una varietà $V^2_{6^{(n+m)}}$ dell'S_{11} complesso. Di tale varietà ci siamo serviti, senza indicarne la provenienza [trattata ora in questa nota], per la determinazione di una trasformazione birazionale atta a sciogliere le singolarità della c^n [1]).

Si studiano, inoltre, altre varietà dell'S_{11} legate a detta V_6, e alla rappresentazione complessa del prolungamento triduale della curva complessa c^n, considerando l'algebra dei numeri triduali come sottoalgebra dei numeri doppio-biduali.

1. L'algebra dei numeri triduali come sottoalgebra dell'algebra del 4^0 ordine dei numeri doppio-biduali:

Nell'algebra dei numeri doppio-biduali [somma diretta di due algebre equivalenti all'algebra dei numeri biduali] con le unità u_1 , u_2 , u_3 , u_4 e la tabella di moltiplicazione

---

[1]) N. Spampinato. *Trasformazione birazionale determinata da una ipersuperficie dell'* S_r *complesso per lo scioglimento delle sue singolarità* Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. LXXXI, Fasc. II.

N. Spampinato. *Effettiva determinazione di una trasformazione birazionale trasformante una data ipersuperficie dell'* S_r *in una varietà dell'* S_{r^2+r} *priva di punti multipli.*

Si veda in proposito il n° 1 di questo secondo lavoro, dove è *definita* una varietà di dimensione r^2+2r-2 costituita da ∞^{r-1} $S^{(F)}$ generatori di dimensione r^2+r-1 appartenente ad un S_R con $R=2(r+r^2)-1$ e determinata da una ipersuperficie dell'S_r, senza precisare l'origine di tale definizione, che è legata alla teoria delle algebre. Nel caso $r=2$ si ha precisamente la varietà di dimensione 6 costituita da ∞^1 S_5 appartenente ad un S_{11} che si studia in questa nota, per indicarne la origine legata all'algebra dei numeri triduali e dei numeri doppio-biduali. In seguito tratteremo la detta questione per $r>2$.

(1)

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	0	0
u_2	u_2	0	0	0
u_3	0	0	u_3	u_4
u_4	0	0	u_4	0

,

consideriamo il *modulo*

(2) $$u = u_1 + u_3$$

e le due unità u_2 , u_4. Il sistema da essi determinato, costituito dai numeri

(3) $$\mu = x\,(u_1 + u_3) + yu_2 + zu_4 = xu + yu_2 + zu_4$$

costituisce un' algebra del terzo ordine, perchè il prodotto di due elementi del tipo (3) è sempre un elemento dello stesso tipo [come si verifica eseguendo il prodotto tenendo conto della tabella di moltiplicazione (1)]. Assumendo in questa sottoalgebra del terzo ordine come unità u , u_2 , u_4, si ha la relativa tabella di moltiplicazione:

(4)

	u	u_2	u_4
u	u	u_2	u_4
u_2	u_2	0	0
u_4	u_4	0	0

come si verifica tenendo conto della posizione (2) e della tabella (1). Ora la (4) non è altro che la tabella dei *numeri triduali.* Si ha perciò:

I) *L' algebra dei numeri doppio-biduali contiene una sottoalgebra equivalente all' algebra dei numeri triduali. Essa è determinata dal modulo u e dalle unità d' indice pari* u_2 , u_4, *che assunte come unità si moltiplicano con la tabella* (4).

Si osservi esplicitamente che un elemento

(5) $$\eta = x_1\,u_1 + x_2\,u_2 + x_3\,u_3 + x_4\,u_4$$

dell' algebra di tabella (1) risulta appartenente alla sottoalgebra di tabella (4), cioè un elemento del tipo (3), quando e solo quando è $x_1 = x_3$. Posto in tal caso $x_1 = x_3 = x$, $x_2 = y$ ed $x_4 = z$ la (5) ci dà l'elemento μ dato dalla (3). Sicchè:

II) *I numeri doppio biduali* η *dati dalla* (5), *che costituiscono la sottoalgebra equivalente all' algebra dei numeri triduali, sono quelli che hanno eguali le coordinate di indice dispari* [*cioè relative alle unità* u_1 *ed* u_3 *la cui somma dà il modulo u dell' algebra*].

E' bene notare inoltre che gli elementi $x_1 u_1 + x_2 u_2$ costituiscono una sottoalgebra di ordine 2 equivalente all' algebra dei numeri biduali, con la tabella di moltiplicazione

(6)

	u_1	u_2
u_1	u_1	u_2
u_2	u_2	0

Anche gli elementi del tipo $x_3 u_3 + x_4 u_4$ costituiscono una sottoalgebra equivalente a quella dei numeri biduali, perchè le unità u_3 ed u_4 si moltiplicano con la tabella

$(6)_1$

	u_3	u_4
u_3	u_3	u_4
u_4	u_4	0

Il prodotto $(x_1 u_1 + x_2 u_2)(x_3 u_3 + x_4 u_4)$ per la tabella (4) risulta sempre nullo, mentre la somma di tali due elementi (variabili in dette due sottoalgebre di ordine 2) dà l'elemento (5) variabile nell' algebra di tabella (1), che risulta pertanto *somma diretta* di tali due sottoalgebre.

L'algebra di tabella (6) ha il modulo u_1. Quella di tabella $(6)_1$ ha il modulo u_3. [Il modulo u dell' algebra di tabella (1) è la somma dei moduli u_1 ed u_3 delle due sottoalgebre di cui è somma diretta]. Si osservi esplicitamente che:

III) *La somma di due elementi* $x_1 u_1 + x_2 u_2$ *ed* $x_3 u_3 + x_4 u_4$ *delle*

due sottoalgebre di numeri biduali dà un numero doppio biduale (5) *appartenente alla sottoalgebra di numeri triduali* (3) *quando e solo quando sono eguali i coefficienti* x_1 *ed* x_3 *con i quali vengono moltiplicati i moduli* u_1 *ed* u_3 *di dette sottoalgebre.*

Per mettere i numeri doppio-biduali sotto forma di matrici quadrate di ordine 4, ad elementi complessi, basta moltiplicare un dato elemento (5) per ciascuna delle quattro unità e considerare la matrice dei coefficienti dei quattro prodotti ηu_j. Si ha la matrice:

$$(7) \qquad X = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{Vmatrix}.$$

Per $x_1 = x_3 = x$, $x_2 = y$, $x_4 = z$ si hanno le matrici del tipo:

$$(8) \qquad M = \begin{Vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & z \\ 0 & 0 & 0 & x \end{Vmatrix}.$$

Si ha perciò:

IV) *Considerando i numeri doppio-biduali sotto forma di matrici* (7) *la sottoalgebra di numeri triduali risulta costituita dalle matrici del tipo* (8).

Si osservi che la matrice identica, che rappresenta il modulo u della algebra, si ottiene dalla (7) per $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ (perchè è $u = u_1 + u_3$) e dalla matrice (8) per $x = 1$, $y = 0$ e $z = 0$.

Le tre matrici del tipo (8) che rappresentano le tre unità u , u_2 ed u_4 sono rispettivamente:

$$(9) \qquad U = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad V = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad W = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

che si moltiplicano fra di loro con la tabella di moltiplicazione

(10)

	U	V	W
U	U	V	W
V	V	0	0
W	W	0	0

(dei numeri triduali).

Raccogliendo si ha:

V) *L'algebra dei numeri triduali, definita nel corpo complesso, si può considerare costituita dalle matrici* M *del* 4^0 *ordine del tipo* (8), *con le tre unità* U , V , W *date dalle* (9), *che si moltiplicano con la tabella* (10) *e legate alla* M *dalla relazione*

$$M = xU + yV + zW \tag{11}$$

che dà gli ∞^3 *numeri triduali al variare di* x , y *e* z *nel corpo complesso. Questi numeri sono compresi fra gli* ∞^4 *numeri doppio-biduali dati dalla matrice* (7) *al variare di* x_1 , x_2 , x_3 *ed* x_4 *nel corpo complesso.*

2. La congruenza di S_3 dell'S_{11} complesso costituente la I^a^ rappresentazione complessa dell'S_2 doppio-biduale

Nell'S_2 doppio-biduale consideriamo un punto, di coordinate doppio-biduali (X , Y , Z), con la terna (X , Y , Z) di caratteristica massima, cioè 4, e definita a meno di un fattore doppio-biduale non nullo nè divisore dello zero. Posto

$$X = \Sigma\, x_j\, u_j \quad , \quad Y = \Sigma\, y_j\, u_j \quad , \quad Z = \Sigma\, z_j\, u_j$$

deve essere di caratteristica 4 la matrice:

$$(11_1) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 & y_1 & y_2 & 0 & 0 & z_1 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & y_1 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & y_3 & y_4 & 0 & 0 & z_3 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & 0 & z_3 \end{vmatrix}$$

Nell'S_{11} proiettivo complesso i quattro punti aventi per coordinate le

quattro righe della matrice (11) risultano indipendenti e quindi sono congiunti da un S_3 che si dice immagine, nella I^a rappresentazione, del punto doppio-biduale (X , Y , Z) dato, in quanto che alla terna (KX , KY , KZ) con K numero doppio-biduale non nullo nè divisore dello zero, risponde lo stesso S_3.

Variando il punto (X , Y , Z) nell'S_2 doppio-biduale, l'S_3 immagine in S_{11} descrive la congruenza (S_3) che dà la I^a rappresentazione dell'S_2 doppio-biduale.

Si osservi che, indicando con A_1 , A_2 , . . . , A_{12} i punti fondamentali del sistema di coordinate proiettive supposto fissato in S_{11}, i punti P_1 , P_2 , P_3 , P_4 aventi per coordinate le quattro righe della matrice (11) variano: P_2 nel piano $\pi_2 = A_2\, A_6\, A_{10}$; il punto P_4 nel piano $\pi_4 = A_4\, A_8\, A_{12}$; il punto P_1 nell'$S'_5 = A_1\, A_2\, A_5\, A_6\, A_9\, A_{10}$ congiungente i due piani $\pi_1 = A_1\, A_5\, A_9$ e π_2. Infine il punto P_3 varia nell'$S''_5 = A_3\, A_4\, A_7\, A_8\, A_{11}\, A_{12}$ congiungente il piano $\pi_3 = A_3\, A_8\, A_{11}$ con il piano π_4. Indicando con $(x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , y_1 , \ldots , y_4 , z_1 , \ldots , z_4)$ le coordinate correnti in S_{11}, per avere un S_3 della congruenza (S_3) i punti P_2 e P_4 si possono fissare a piacere rispettivamente nei piani π_2 e π_4, e fissati P'_2 e P'_4, cioè le loro coordinate non nulle x'_1 , y'_1 , z'_1 ; x'_3 , y'_3 , z'_3, il punto P_1 di S'_5 deve soddisfare all'equazioni:

$$x_1 : x'_1 = y_1 : y'_1 = z_1 : z'_1 \tag{12}$$

ed il punto P_3 di S''_5 deve soddisfare all'equazioni:

$$x_3 : x'_3 = y_3 : y'_3 = z_3 : z'_3 . \tag{13}$$

Le (12) in S'_5 rappresentano l'$S_3 = \pi_2\, \overline{P}_1$, con

$$\overline{P}_1 (x'_1 , 0 , 0 , 0 , y'_1 , 0 , 0 , 0 , z'_1 , 0 , 0 , 0) \tag{14}$$

che soddisfa alle (12), perchè le equazioni di π_2 in S'_5 sono

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0$$

che rendono identicamente soddisfatte le (12).

Le (13) rappresentano in S''_5 l'$S_3 = \pi_4\, \overline{P}'_3$, con

$$\overline{P}'_3 (0 , 0 , x'_3 , 0 , 0 , 0 , y'_3 , 0 , 0 , 0 , z'_3 , 0) \tag{15}$$

che soddisfa alle (13), perchè le equazioni di π_4 in S_5'' sono

$$x_3 = y_3 = z_3 = 0.$$

Si osservi che P'_2 e $\overline{P}'_1$ si corrispondono nella proiettività fra π_2 e π_1 di equazioni:

$$(16) \qquad x_1 = x_2 \quad , \quad y_1 = y_2 \quad , \quad z_1 = z_2$$

Così si ha pure che P'_4 e $\overline{P}'_3$ si corrispondono nella proiettività fra π_4 e π_3 di equazioni:

$$(17) \qquad x_3 = x_4 \quad , \quad y_3 = y_4 \quad , \quad z_3 = z_4$$

Si ha perciò che:

I) *Gli* S_3 *della congruenza* (S_3) *che dà la* I^a^ *rappresentazione dell'* S_2 *doppio-biduale si ottengono congiungendo due rette* $P_1\,P_2$ *e* $P_3\,P_4$ *con* P_2 *in* π_2 *e* P_4 *in* π_4. *Fissati detti due punti in* P'_2 *e* P'_4, P_1 *deve appartenere all'* $S_3 = \pi_2\,\overline{P}'_1$ *e* P_3 *deve appartenere all'* $S_3 = \pi_4\,\overline{P}'_3$, *essendo* $\overline{P}'_1$ *e* $\overline{P}'_3$ *i punti di* π_1 *e* π_3 *omologhi di* P'_2 *e* P'_4 *nelle proiettività di equazioni* (16) *e* (17) *rispettivamente.*

Si osservi esplicitamente che:

II) *Le rette* $P_1\,P_2$ *dentro l'*$S'_5 = \pi_1\pi_2$ (*e le rette* $P_3\,P_4$ *dentro l'*$S''_5 = \pi_3\pi_4$) *costituiscono la congruenza* (S_1) *che dà la* I^a^ *rappresentazione complessa del piano biduale.*

Sicchè: *la congruenza* (S_3) *dell'* S_{11} *rappresentante il piano doppio-biduale si ottiene congiungendo le rette delle* ∞^8 *coppie di generatrici di due congruenze* (S_1), *di ambiente* S'_5 *ed* S''_5; *ciascuna immagine del piano biduale.* Ciò deriva dalla proprietà dell'algebra dei numeri doppio-biduali di essere riducibile, e precisamente somma diretta di due algebre equivalenti all'algebra dei numeri biduali.

Si noti ora che i due $S_3 = \pi_2\,\overline{P}'_1$ e $S_3 = \pi_4\,\overline{P}'_3$ sono congiunti da un S_7 che sarà riempito dagli ∞^4 S_3 della congruenza (S_3) passanti per i due fissati punti P'_2 e P'_4 in π_2 e π_4. Tale S_7 appartiene alla stella di S_7 avente per vertice l'$S^*_5 = \pi_2\,\pi_4$. Sicchè:

III) *Gli* ∞^8 S_3 *della congruenza* (S_3) *si distribuiscono ad* ∞^4 *ad* ∞^4 *negli* ∞^4 S_7 *della stella di vertice* $S^*_5 = \pi_2\,\pi_4$.

3. Gli ∞^6 S_3 della congruenza (S_3), immagine del piano doppio-biduale rappresentanti i punti del piano triduale

Nel n° 1 abbiamo osservato che l'algebra dei numeri doppio-biduali contiene una sottoalgebra equivalente all'algebra dei numeri triduali. Ne

segue che dentro il piano doppio-biduale c'è luogo a considerare il piano triduale come, per es., nel piano complesso c'è luogo a considerare il piano reale perchè il corpo dei numeri complessi contiene un sottocorpo equivalente a quello dei numeri reali.

Un punto del piano doppio-biduale di coordinate (X , Y , Z) lo diremo triduale quando X , Y e Z sono appartenenti alla sottoalgebra dei numeri triduali, contenuta in quella dei numeri doppio-biduali, cioè quando messi sotto forma di matrici del tipo (7), risultano, in particolare, del tipo (8), ovvero devono avere le due coordinate di indici dispari x_1 ed x_3 eguali fra di loro. In tal caso la matrice (11) avrà gli elementi soddisfacenti alle tre condizioni

$$x_1 = x_3 \quad , \quad y_1 = y_3 \quad , \quad z_1 = z_3 \tag{18}$$

Ne segue che i due punti P_2 e P_4 aventi per coordinate la seconda e quarta riga di detta matrice si corrispondono nella proiettività fra i piani π_2 e π_4 (dove variano P_2 e P_4) di equazioni (18). Si ha perciò che:

I) *Gli* S_3 *della congruenza* (S_3) *che rappresentano i punti del piano triduale contenuto nel piano doppio-biduale, sono quelli i cui punti d'appoggio* P_2 *e* P_4, *nei piani* π_2 *e* π_4, *si corrispondono nelle proiettività, fra tali piani, di equazioni* (18).

Tenendo allora conto della proprietà III) del n° precedente si ha:

II) *Gl'* ∞^6 S_3 *che rappresentano in* S_{11} *i punti del piano triduale si distribuiscono ad* ∞^4 *ad* ∞^4 *in* ∞^2 S_7 *della stella di vertice* $S^*_5 = \pi_2\pi_4$, *proiettanti da* S^*_5 *le* ∞^2 *rette congiungenti le coppie di punti di* π_1 *e* π_3 *corrispondenti nella proiettività di equazioni* (18), *assunte come coordinate in* π_1 (x_1 , y_1 , z_1) *e in* π_3 (x_3 , y_3 , z_3).

4. Prolungamento di una curva algebrica di un piano complesso nel piano triduale e sua rappresentazione complessa nell'S_{11} ambiente della congruenza (S_3)

Nel piano proiettivo complesso consideriamo una curva algebrica irriducibile c^n, di ordine $n > 1$ di equazione

$$f(x , y , z) = 0 \tag{19}$$

Sostituendo nella forma $f(x , y , z)$ alle variabili complesse x , y , z le variabili doppio-biduali X , Y , Z, si ha l'equazione

$$f(X , Y , Z) = 0 \tag{20}$$

che rappresenta, nel piano doppio-biduale, la curva prolungamento di c^n in detto piano, curva che sarà rappresentata in S_{11} dalla varietà, composta con la congruenza (S_3), che rappresenta il piano doppio-biduale, avente per equazioni le quattro equazioni alle quali è equivalente la (20), e che si ottengono sostituendo alle variabili X , Y , Z le loro espressioni come combinazioni delle quattro unità $u_1 , \ldots , u_4$, eseguendo i calcoli tenendo conto della tabella di moltiplicazione (1), ed eguagliando a zero le forme che risultano a coefficiente di dette unità. Si ottiene precisamente il sistema:

$$(21) \qquad \begin{cases} f(x_1 , y_1 , z_1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} x_2 + \dfrac{\partial f}{\partial y_1} y_2 + \dfrac{\partial f}{\partial z_1} z_2 = 0 \\ f(x_3 , y_3 , z_3) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} x_4 + \dfrac{\partial f}{\partial y_3} y_4 + \dfrac{\partial f}{\partial z_3} z_4 = 0. \end{cases}$$

Volendo prolungare la c^n complessa nel piano triduale, servendoci dell'algebra triduale come sottoalgebra dell'algebra doppio-biduale, basta imporre la condizione che le variabili X , Y , Z varino, in particolare, nella sottoalgebra triduale, cioè bisogna imporre le condizioni

$$(22) \qquad x_1 = x_3 \quad , \quad y_1 = y_3 \quad , \quad z_1 = z_3$$

da aggregare alle (21), e così degli S_3 di (S_3) che compongono la varietà di equazioni (21), si verranno a considerare solo quelli che rappresentano punti triduali, e che costituiranno la varietà che rappresenterà nell'S_{11} la curva del piano triduale prolungamento della c^n in questo piano.

Si osservi ora che le prime due equazioni (21) nell'$S'_5 = \pi_1 \pi_2$ rappresentano [2]) la varietà V_3, di ordine n^2, costituita da ∞^1 *piani generatori formanti una varietà di ordine* $n+m$, essendo m la classe di c^n, *e da eventuali* S_3 *che si staccano da essa* (quando la c^n contiene punti multipli). La coppia della terza e quarta equazione (21) rappresenta una analoga varietà V_3 in $S''_5 = \pi_3 \pi_4$ costituita da eventuali S_3 che si staccano da essa e da una varietà V_3 residua, con ∞^1 piani generatori, di ordine $n + m$. Inoltre il generico piano generatore di ciascuna di dette $V_3^{n\ m}$, in S'_5 o in S''_5, risponde ad un punto semplice di c^n. Sicchè ad ogni punto semplice

---

[2]) N. Spampinato. *Lezioni di Geometria Superiore,* Vol. IX, Parte Terza, § 6; Le varietà dell'S_5 complesso determinate da una curva algebrica piana complessa prolungata nel piano biduale.

di c^n rispondono due piani, in dette varietà, di S'_5 ed S''_5, che congiunti danno un S_5 generatore della varietà rappresentata dal sistema (21). Questa varietà è pertanto costituita *da eventuali* S_7 *provenienti da eventuali punti multipli di* c^n *e da* S_5 *generatori e conterrà la varietà* V_6 *costituita a* ∞^1 *di tali* S_5 *generatori* quando si tiene conto anche delle condizioni (22) che porta di conseguenza questa proprietà: *fissato un piano generatore della* V_3^{n+m} *di* S'_5 *resta determinata il piano generatore dell' altra* V_3^{n+m} *che si deve congiungere con il primo per avere un* S_5 *generatore della* V_6 *che rappresenterà la* c^n *prolungata nel piano triduale e contenuta nella* V_7, *di equazioni* (21) *che rappresenta la* c^n *prolungata nel piano doppio-biduale.*

Dal punto di vista sintetico si osservi che la prima e la terza delle (21) rappresentano rispettivamente nei piani π_1 e π_3 due curve c_1 e c_3 proiettive alla data curva c^n. Se indichiamo con c_2 e c_4 le curve di π_2 e π_4 di equazioni

$$f(x_2 , y_2 , z_2) = 0 \tag{23}$$

$$f(x_4 , y_4 , z_4) = 0, \tag{24}$$

pure proiettive alla c^n, detti Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 i punti di c_1 , c_2 , c_3 , c_4 rispondenti ad uno stesso punto semplice di c^n, l' S_5 generatore della V_6 di cui sopra, rispondente ad un tale punto di c^n, si ottiene congiungendo i due punti Q_1 e Q_3 con le tangenti a c_2 e c_3 nei punti Q_2 e Q_3, tangenti che i tali piani sono rappresentati, rispettivamente, dalle seconda e quarta equazione del sistema (21).

Variando il punto *semplice* in c^n varierà detto S_5 generatore nella V_6, assumendo delle posizioni limiti al tendere del punto semplice ad un eventuale punto multiplo della c^n.

[Per lo scopo a cui miriamo interessa determinare le dimensioni delle varietà multiple che la V_6 contiene, costituita di punti di essa per ciascuno dei quali non passa un sol S_5 generatore.

Dimostreremo (n. 5) che la V_6 contiene una V_3^3 con la multiplicità m, ed eventualmente, altri S_3 multipli, uno per ogni eventuale punto multiplo della c^n a tangenti non tutte sovrapposte. Sicchè la dimensione della sua varietà multipla risulta sempre 3, e quindi $<$ della dimensione dei suoi S_5 generatori. Ed è in base a tale proprietà che si perviene allo scioglimento delle singolarità della c^n]. Intanto abbiamo che:

I) *La varietà dell'* S_{11} *complesso che rappresenta una curva algebrica triduale, prolungamento di una* c^n *piana complessa esclusi gli* S_7 *rispondenti ai punti multipli, è una* V_6 *costituita da* ∞^1 S_5 *generatori in corrispondenza alle* ∞^1 *quaterne* (Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4) *di punti corrispon-*

denti, nelle quattro curve c_1 , c_2 , c_3 , c_4, *dei piani* π_1 , π_2 , π_3 , π_4, *proiettive alla data* c^n. *Ogni* S_5 *generatore congiunge i punti* Q_1 , Q_3 *e le tangenti* t_2 *e* t_4 *a* c_2 *e* c_4 *in* Q_2 *e* Q_4. *Gli* ∞^1 *piani* $Q_1\ t_2$ *descrivono in* $S'_5 = \pi_1\ \pi_2$ *una* V_3 *di ordine* $n + m$, *indicando con* m *la classe di* c^n. *Analoga proprietà vale per i piani* $Q_3\ t_4$ *che variano nell'* $S''_5 = \pi_3\ \pi_4$.

Sechiamo ora la V_6 con un S_8 passante per S'_5. Tale S_8 secherà l'S''_5 in un S_2 e questo secherà la V_3 di ordine $n + m$ che la V_6 ha in S''_5 in $n + m$ punti, per ciascuno dei quali passa un S_5 generatore della V_6, che ha in S'_5 un piano; quindi questi $n + m$ S_5 generatori saranno secati dall'S_8 in altrettanti S_3, facenti parte della V_3, la quale, pertanto, si spezzerà nella V_3^{n+m} che la V_6 ha in S'_5 e in detti $n + m$ S_3. Si ha perciò:

II) *La* V_6 *è di ordine* $2\ (n + m)$.

Nell'S_5 congiungente $\pi_1\ \pi_3$ la V_6 ha la superficie rigata costituita dalle ∞^1 delle rette $Q_1\ Q_3$, cioè una V_2^{2n} dato che Q_1 e Q_3 si corrispondono in una proiettività fra c_1 e c_3 e quindi un S_4 di S_5 passante per π_1 seca detta superficie in c_1^n e nelle n rette $Q^j_1\ Q^j_3$, indicando con Q^j_3 gli n punti in cui l'S_4 seca la c_3. Dunque:

III) *La* V_6 *è secata dall'* S_5 *congiungente* π_1 *e* π_3 *in una rigata* V_2^{2n}.

Nell'S_5^* congiungente π_2 con π_4 la V_6 ha la ipersuperficie V_4 costituita dagli ∞^1 $S_3 = t_2\ t_4$. Per tale V_4 ogni punto di π_2 è di multiplicità m perchè per un tale punto escono m tangenti t^j_2 alla c_2 e quindi passano m S_3 generatori della V_4. Analoga proprietà vale per il piano π_4. Secando la V_4 con un S_3 dell'S_5 ambiente passante per π_2, detto P_4 il punto in cui detto S_3 seca π_4, dette t^j_4 le m tangenti a c_4 uscenti da P_4 e dette t'_2 le tangenti a c_2 rispondenti alle tangenti a $c_4\ t^j_4$, risulta che l'S_3 considerato seca la V_4, fuori di π_2, negli m $S_2 = P_4\ t^j_2$. Essendo π_2 *m-plo* per la V_4 questa risulterà di ordine $2m$. Sicchè:

IV) *La* V_6 *è secata dall'* S^*_5 *congiungente* π_2 *e* π_4 *in una* V_4^{2m} *costituita da* ∞^1 S_3 *generatori, con i piani* π_2 *e* π_3 *multipli di multiplicità* m.

Si osservi esplicitamente che i piani π_2 e π_4 sono multipli di multiplicità m per la V_6 perchè per ciascun punto di un tale piano escono m S_5 generatori della V_6, dato che le curve c_2 e c_4 sono di classe m e per ogni tangente a c_2, o a c_4, passa un S_5 generatore della V_6. Dunque:

V) *I piani* π_2 *e* π_4 *sono m-pli per la* V_6.

Nota. - Si noti che tenendo conto delle proprietà III) e IV) si può ritrovare che la V_6 è di ordine $2\ (n + m)$. Basta secarla con un S_9 passante per π_2 e π_4. Questo S_9 secherà la V_2^{2n} che trovasi nell'$S_5 = \pi_1\ \pi_3$ in $2n$ punti per i quali passano $2n$ generatrici della rigata V_2^{2n} e quindi $2n$ S_5

generatori della V_6, appoggiati a $2n$ S_3 dell $S^*_5 = \pi_2\,\pi_4$ del tipo $t_2\,t_4$ e perciò secati dall'S_9 in $2n$ S_4. Dunque l'S_9 seca la V_6 fuori dell'S_5 congiungente π_2 e π_4 (dove ha una V_4 di ordine $2m$) in $2n$ S_4, e perciò la V_6 risulta di ordine $2n + 2m$.

5. Punti multipli della V_6 di S_{11}

Un punto della V_6 sarà per essa multiplo quando per tale punto passano almeno due S_6 generatori della V_6. Ora due di detti S_5 generatori uscenti da due punti distinti Q_1 e Q'_1 di c_1, quindi congiungenti, con le notazioni già usate $Q_1\,Q_3\,t_2\,t_4$ e $Q'_1\,Q'_3\,t'_2\,t'_4$, hanno in comune solo la retta $r = T_2\,T_4$ congiungente i punti $T_2 = t_2\,t'_2$ e $T_4 = t_4\,t'_4$ di π_2 e π_4, corrispondenti nella proiettività fra π_2 e π_4 dove si corrispondono c_2 e c_4. Le ∞^2 rette r che così si ottengono costituiscono una V_3 di ordine 3, perchè un S_4 passante per π_2, la seca in π_2 e in una quadrica costituita da ∞^1 fra le rette r, appoggiate alla retta di π_4 in cui questo piano è secata dall'S_4 e alla retta omologa in π_2 nella proiettività.

Si osservi ora che per un punto di detta $V_3{}^3$ passa una generatrice r che si appoggia a due punti T_2 e T_4 di π_2 e π_4 e quindi per un tal punto passano m S_5 generatori della V_6, appoggiati in π_2 nelle m rette tangenti a c_2 uscenti da T_2. Quindi:

I) *Dentro l'* S^*_5 *congiungente* π_2 *con* π_4 *la* V_6 *contiene sempre una* $V_3{}^3$ *di multiplicità m (facente parte della* $V_4{}^{2m}$).

Se la c^n [e quindi le c_j] non ha punti multipli, la V_6 non avrà altri punti multipli oltre quella $V_3{}^3$ sudetta, perchè mentre Q_1, per es, descrive la c_1 l'S_5 generatore della V_6 uscente da Q_1 descrive la V_6 e si avrà una corrispondenza biunivoca senza eccezione fra la c_1 e l'insieme degli S_5 generatori della V_6. Se la c^n ha un punto multiplo e diciamo D_j il corrispondente punto multiplo nella c_j, nel caso che le tangenti a c^n in tale punto multiplo siano tutte coincidenti, lo stesso avverrà per D_j nella c_j, e quindi si avrà nella V_6 un solo S_5 generatore passante per D_j, e quindi anche in tal caso al punto multiplo della c^n corrisponde un solo S_5 generatore della V_6. Se invece la c^n ha nel detto punto multiplo due tangenti distinte e quindi esistono almeno due rami di essa aventi per origine detto punto, la c_j, in corrispondenza ammetterà almeno due rami uscenti da C_j, e facendo variare Q_1, per es. in uno o nell'altro dei due rami uscenti da D_1, l'S_6 generatore della V_6 uscente da Q_1 tenderà all'uno o all'altro dei due S_5 generatori $D_1\,D_3\,t_2\,t_4$, $D_1\,D_3\,t'_2\,t'_4$ indicando con $t_2\,t'_2$ (e t_4 , t'_4) le due tangenti distinte a c_2 (a c_4) in D_2 (in D_4).

Tali due S_5 generatori *distinti* della V_6, rispondenti ad un punto multiplo della c^n con due tangenti distinte, hanno in comune l'S_3 congiungente

i punti D_1 D_2 D_3 D_4 che sarà pertanto, multiplo per la V_6 con la multiplicità 2 se la c^n nel punto multiplo considerata ha solo due rette tangenti distinte. Se invece tali tangenti distinte sono k, il detto S_3 risulterà con la multiplicità k perchè vi saranno k S_5 generatori distinti della V_6 che avranno in comune detto S_3. Sicchè si ha:

II) *La* V_6 *oltre la* V_3^3 *m-pla può contenere eventualmente solo altri* S_3 *multipli e precisamente conterrà un* S_3 *k-plo in corrispondenza ad ogni punto multiplo di* c^n, *con* $k>1$ *tangenti distinte alla* c^n *in tale punto.*

6. La V_8^7 di S_{11} contenente tutte le V_6 determinate dalle curve di un piano

Variando la curva algebrica c^n nel piano complesso, e quindi il suo prolungamento nel piano triduale, varierà la $V_6^{2(n+m)}$ che la rappresenta in S_{11}, e quindi i suoi ∞^1 S_5 generatori, ciascuno dei quali congiunge, con le notazioni già usate, Q_1 Q_3 t_2 t_4, con t_2 passante per Q_2, t_4 passante per Q_4, con i punti Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 corrispondentisi nelle proiettività fra i piani π_1 , π_2 , π_3 , π_4, determinate dall'eguaglianza delle coordinate correnti in tali piani, e con t_2 e t_4 corrispondentisi inoltre nella proiettività fra π_2 e π_4. Essendo ∞^2 le quaterne di punti Q_j ed essendo per ognuna di tali quaterne ∞^1 le coppie t_2 , t_4 suddette, avremo in tutto ∞^3 di tali quaterne Q_1 Q_3 t_2 t_4, e quindi ∞^3 S_5 generatori di una varietà V_8 di cui farà sempre parte ogni $V_6^{2(n+m)}$ sudetta.

Tale V_8 sarà secata dall'$S'_5 = \pi_1 \pi_3$ nella V'^3_3 costituita dalle ∞^2 rette Q_1 Q_2. Essa conterrà, inoltre, l'$S''_5 = \pi_2 \pi_4$ perchè riempito dagli ∞^2 $S_3 = t_2 t_4$. Detto S''_5 sarà semplice per la V_8 perchè un punto P di esso, fissato genericamente, passa un solo di detti S_3. Infatti detti P_2 e P_4 i punti proiezioni di P da π_4 su π_2 e da π_2 su π_4, e detti M_4 M_2 gli omologhi di P_2 e P_4 nella proiettività fra π_2 e π_4, le rette $t_2 = P_2 M_2$ e $t_4 = P_4 M_4$ saranno le due sole rette omologhe in detta proiettività passanti per P_2 e P_4; e quindi l'$S_3 = t_2 t_4$, che esse determinano, sarà l'unico S_3, fra i sudetti ∞^2, che passa per il punto P (appartenente alla retta congiungente P_2 con P_4).

Per determinare l'ordine della V_8 sechiamola con un S_8 passante per l'S''_5, che si staccherà dalla V_5 sezione. Questo S_8 secherà l'S'_5 ambiente della V'^3_3, in un piano che aveva tre punti in comune con questa varietà, diciamo A , B e C. Per questi punti passeranno tre generatrici a , b , c, della V'^3_3, appoggiate a π_1 e π_3 in tre coppie di punti A_1 , A_3 ; B_1 , B_3 ; C_1 , C_3, corrispondentisi nella proiettività fra π_1 e π_3. In corrispondenza alla generatrice $a = A_1 A_3$ avremo ∞^1 S_5 generatori della V_8 passanti per a, ciascuno dei quali è del tipo A_1 A_3 t_2 t_4 con t_2 e t_4 variabili nei fasci di π_2

e π_4 con i centri in A_2 e A_4, omologhi di A_1 e A_3 nelle proiettività fra π_1 , π_2 , π_3 , π_4, anch'esse corrispondentisi nella proiettività fra π_2 e π_4. Ognuno di detti ∞^1 S_5 generatori avrà pertanto dentro l'S_8 il punto A e l'$S_3 = t_2\, t_4$, perchè contenuto in $S_5 = \pi_2\, \pi_4$, e conseguentemente l'S_8 conterrà la $V_5^{(A)}$ costituita dagli ∞^1 $S_4 = A t_2\, t_4$, passanti per il piano $AA_2\, A_4$ ed appartenente all'$S_6 = AS''_5$. Tale varietà $V_5^{(A)}$ è un'iperquadrica, dato che t_2 e t_4 si corrispondono in una proiettività fra i due fasci di rette di centri A_2 e A_4 con i sostegni nei due piani π_2 e π_4. Ne segue che dette r_2 ed r_4, due rette generiche di π_2 e π_4 gli S_4 generatori della $V_5^{(A)}$ secheranno nell'$S_3 = r_2\, r_4$ una quadrica di direttrici r_2 ed r_4, quadrica che proiettata dal piano $AA_2\, A_4$ darà la $V_5^{(A)}$.

In corrispondenza agli altri due punti B e C avremo altre due iperquadriche $V_5^{(B)}$ e $V^{(C)}$, che insieme alla $V_5^{(A)}$ costituiranno la varietà in l'S_5 considerato seca la V_8 fuori del suo S''_8 semplice. La V_8 risulta, pertanto, di ordine 7.

Si ha perciò

II) *La* $V_6^{2(n+m)}$ *determinata da una curva algebrica piana* c^n, *di classe* m, *nell'* S_{11}, *appartiene sempre ad una* V_8^7 *dell'* S_{11} *costituita da* ∞^3 S_5 *generatori, fra i quali variano gli* ∞^1 S_5 *generatori della* V_6 *al variare della curva fra tutte le curve del piano.*

7. La V_8^7 come insieme degli ∞^2 S_3-coni quadrici V_6^2 determinati dalle rette di un piano

Nel caso $n = 1$, escluso nei n^i precedenti, la c^n si riduce ad una retta c^1, e quindi nei quattro piani π_j le quattro c_j^n si riducono a quattro rette diciamo r_j; le tangenti t_2 e t_4 nei punti Q_2 e Q_4 di c_2 e c_4 vengono sempre a coincidere con le rette r_2 ed r_4 stesse. Ne segue che in questo caso, essendo $m = 0$, la V_6 di ordine $2(n + m)$ si riduce alla V_6^2 riempita dagli ∞^1 S_5 determinati da $Q_1\, Q_3\, r_2\, r_4$ al variare alla coppia $Q_1\ Q_3$ di punti omologhi delle rette r_1 ed r_3 nella proiettività fra π_1 e π_3. Tale V_6^2 è pertanto l'S_3-cono che si ottiene proiettando dall'$S_3 = r_2\, r_4$ la quadrica di direttrici r_1 ed r_3 e le generatrici $Q_1\, Q_3$. Variando dopo la retta c^1 nel piano complesso, avremo ∞^2 V_6^2, ed ∞^3 $S_5 = Q_1\, Q_3\, r_2\, r_4$. Questi S_5 non sono altro che gli S_5 di generatori della V_8^7 considerata nel n° precedente, dato che in questo caso le tangenti t_2 e t_4 lì considerate coincidono con le rette r_2 ed r_4. Dunque:

I) *La* V_8^7 *contenente tutte le* $V_6^{2(n+m)}$ *determinate in* S_{11} *dalle curve* c^n *del piano complesso, è costituita dalle* ∞^2 V_6^2, *ciascuna con* ∞^1 S_5 *generatori, determinate dalle rette di detto piano complesso.*

Osservando che la quaterna $Q_1\ Q_3\ r_2\ r_4$, che determina l'S_5 generatore della V_8^7, si può considerare determinata dalla coppia punto-retta appartenentesi (Q_2, r_2) del piano π_2, si ha che:

II) *La* V_8^7 *dell'* S_{11} *si può considerare, con i suoi* ∞^3 S_5 *generatori in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con le* ∞^3 *coppie punto-retta appartenentisi di un piano complesso. Quando il punto varia in una curva* c^n *e la retta è la tangente a* c^n *in tale punto* l'S_5 *generatore della* V_8^7 *descrive la* $V_6^{2(n+m)}$ *rispondente a* c^n.

Si osservi esplicitamente che ad un punto multiplo della c^n rispondono k S_5 generatori della V_6^{2n-m} se è k il numero delle tangenti *distinte* alla c^n in detto punto multiplo. Tali k S_5 generatori hanno in comune un S_3 *k-plo* per la V_6, per quanto è detto nel n° 5.

Una trasformazione quadratica biduale e la relativa trasformazione cremoniana nell' S_5 ambiente della congruenza Γ

Nota del dott. **Pio Balsimelli**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 6 marzo 1954)

Sunto. — Si introduce la trasformazione birazionale dedotta da una trasformazione quadratica biduale con i tre punti fondamentali infinitamente vicini, si caratterizzano i sistemi lineari di ipersuperficie ad essa legati e si determinano sia nel campo biduale che nel campo complesso gli enti omologhi degli spazi fondamentali

1). *Generalità.*

Consideriamo nel piano biduale la trasformazione quadratica di equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} \gamma'_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2\,\gamma_3 \\ \gamma'_2 = \gamma_1\,\gamma_2 \\ \gamma'_3 = \gamma_2^2 \end{cases}$$

determinata da una rete di coniche aventi in $U_3\,(0\;0\;u)$ lo stesso cerchio osculatore.

Ponendo

$$\begin{aligned} \gamma_i &= x_i\,u + y_i\,\varepsilon \\ \gamma'_i &= x'_i\,u + y'_i\,\varepsilon \end{aligned} \qquad (i = 1\ \ldots\ 3)$$

sostituendo in (1) ed eseguendo le operazioni secondo la tabella di moltiplicazione delle unità u ed ε si perviene, uguagliando i coefficienti di u ed ε alla trasformazione cremoniana dell' S_5 complesso:

$$(2)\qquad \begin{cases} x'_1 = x_1^2 + x_2\,x_3 \\ y'_1 = 2x_1\,y_1 + x_2\,y_3 + x_3\,y_2 \\ x'_2 = x_1\,x_2 \\ y'_2 = x_1\,y_2 + x_2\,y_1 \\ x'_3 = x_2^2 \\ y'_3 = 2\,x_2\,y_2 \end{cases}$$

La trasformazione suddetta è l'immagine in S_5 della trasformazione fissata nel piano biduale ed è determinata dal sistema lineare ∞^5 di iperquadriche dell'S_5 di equazione:

$$\lambda_1 (x_1^2 + x_2 x_3) + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3 x_2^2 + \lambda_4 (2 x_1 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2) + \\ + \lambda_5 (x_1 y_2 + x_2 y_1) + 2 \lambda_6 x_2 y_2 = 0$$

La trasformazione inversa di (2) è:

$$(2') \quad \begin{cases} x_1 = 2 x'^2_3 x'_2 \\ y_1 = 2 x'^2_3 y'_2 - x'_2 x'_3 y'_3 \\ x_2 = 2 x'^3_3 \\ y_2 = x'^2_3 y'_3 \\ x_3 = 2 x'_3 (x'_1 x'_3 - x'^2_2) \\ y_3 = 2 x'^2_2 y'_3 + 2 x'^2_3 y'_1 - 4 x'_2 x'_3 y'_2 - x'_1 x'_3 y'_3 \end{cases}$$

cioè rappresenta una trasformazione cubica dell'S_5.

Si noti che mentre nel caso delle trasformazioni quadratiche biduali con tre punti fondamentali distinti e nel caso delle trasformazioni con due punti fondamentali coincidenti le trasformazioni inverse di quelle da esse determinate nell'S_5 complesso erano del quinto ordine e del quarto ordine rispettivamente, in questo caso la trasformazione inversa è cubica.

L'inversa della trasformazione (1) nel campo biduale è:

$$(3) \quad \begin{cases} \gamma_1 = \gamma'_2 \gamma'_3 \\ \gamma_2 = \gamma'^2_3 \\ \gamma_3 = \gamma'_1 \gamma'_3 - \gamma'^2_2 \end{cases}$$

ed è determinata dal sistema omaloidico di coniche biduali aventi in $U_1 (u, 0, 0)$ lo stesso cerchio osculatore.

La (3) determina nell'S_5 complesso la trasformazione di equazioni:

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = x'_2 x'_3 \\ y_1 = x'_2 y'_3 + x'_3 y'_2 \\ x_2 = x'^2_3 \\ y_2 = 2 x'_3 y'_3 \\ x_3 = x'_1 x'_3 - x'^2_2 \\ y_3 = x'_1 y'_3 + x'_3 y'_1 - 2 x'_2 y'_2 \end{cases}$$

La cui inversa ha equazioni:

$$(4') \quad \begin{cases} x'_1 = 2\,x_2^2\,x_3 + 2\,x_1^2\,x_2 \\ y'_1 = 2\,x_2^2\,y_3 + 4\,x_1\,x_2\,y_1 - 3\,x_1^2\,y_2 - x_2\,x_3\,y_2 \\ x'_2 = 2\,x_1\,x_2^2 \\ y'_2 = 2\,x_2^2\,y_1 - x_1\,x_2\,y_2 \\ x'_3 = 2\,x_2^3 \\ y'_3 = 2\,x_2^2\,y_2 \end{cases}$$

Le trasformazioni (4) e (2′) operano ugualmente nei riguardi della congruenza Γ, nel senso che una retta di Γ è trasformata da (2′) e (4) in una stessa retta di Γ.

Ciò risulta osservando che, se la (1) trasforma un punto biduale in P in P′, la (3) trasforma evidentemente P′ in P e di conseguenza la retta r' immagine di P′ è trasformata da (2′) o da (4) in r immagine di P.

2) *Caratterizzazione dei sistemi di ipersuperficie determinanti le trasformazioni* (2) *e* (2′).

La generica iperquadrica del sistema lineare di equazione:

$$\lambda_1\,(x_1^2 + x_2\,x_3) + \lambda_2\,x_1\,x_2 + \lambda_3\,x_2^2 + \lambda_4\,(2\,x_1\,y_1 + x_2\,y_3 + x_3\,y_2) + \\ + \lambda_5\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1) + 2\,\lambda_6\,x_2\,y_2 = 0$$

contiene il piano $\pi \equiv A_2\,A_4\,A_6$ e la retta $A_5\,A_6$ come semplici e l'iperpiano tangente in un generico punto della $A_5\,A_6$ passa per l'$S_3 \equiv A_1\,A_2\,A_5\,A_6$. Imponendo ora ad una generica iperquadrica dell'S_5 le suddette proprietà si ottiene un sistema lineare ∞^9 a cui appartiene il sistema lineare ∞^5 dato, che si ha dal precedente imponendo l'uguaglianza dei coefficienti di x_1^2 ed $x_2\,x_3$, di $2\,x_1\,y_1$, $x_2\,y_3$, ed $x_3\,y_2$, e di $x_1\,y_2$ ed $x_2\,y_1$.

La generica ipersuperficie cubica del sistema lineare ∞^5 di equazione:

$$2\,\lambda_1\,x_3^2\,x_2 + \lambda_2\,(2\,x_3^2\,y_2 - x_2\,x_3\,y_3) + 2\,\lambda_3\,x_3^3 + \lambda_4\,x_3^2\,y_3 + \\ + 2\,\lambda_5\,x_3\,(x_1\,x_3 - x_2^2) + \lambda_6\,(3\,x_2^2\,y_3 + 2\,x_3^2\,y_1 - 4\,x_2\,x_3\,y_2 - x_1\,x_3\,y_3) = 0$$

ammette il piano $\pi \equiv A_2A_4A_6$ e la retta $A_1\,A_2$ come doppi e l'$S_3 \equiv A_1A_2A_3A_4$ come semplice; inoltre l'ipercono tangente in A_1 si spezza nell'iperpiano $x_3 = 0$ ed in un iperpiano contenente il suddetto S_3, mentre l'ipercono tangente in A_2 si spezza nell'iperpiano $x_3 = 0$ da contarsi due volte. Im-

ponendo alla più generale ipersuperficie cubica dell' S_5 le suddette proprietà viene ad ottenersi un' ipersuperficie cubica che non differisce come numero dei termini dalla nostra, a parte l' uguaglianza di alcuni coefficienti.

3) *Punti fondamentali della trasformazione quadratica biduale* (1).

L' unico punto fondamentale della trasformazione (1) è il punto U_3 (0 , 0 , u). Per determinare gli infiniti omologhi di U_3 consideriamo un fascio di coniche osculatrici nell' origine alle coniche della rete di equazione :

$$K(\gamma_1^2 + \gamma_2\gamma_3) + \gamma_2(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$$

Secando una delle curve così ottenute con un fascio di rette di centro il punto U_3, fascio di equazione : $\gamma_2 = m\gamma_1$ si hanno le equazioni parametriche di una generica conica del fascio :

$$\begin{cases} \gamma_1 = Km \\ \gamma_2 = Km^2 \\ \gamma_3 = m^2 - m - K \end{cases} \qquad \text{(parametro } m\text{)}$$

Mentre un punto P percorre tale conica il punto P′, per le (1), percorre la curva di equazioni :

$$\begin{cases} \gamma'_1 = m - 1 \\ \gamma'_2 = K \\ \gamma'_3 = mK \end{cases}$$

cioè la retta omologa della conica generica del fascio.

Facendo tendere m a zero si ottiene l' omologo del P (della conica considerata) infinitamente vicino ad U_3, cioè il punto P′ (— 1 , K , 0) che al variare della conica nel fascio descrive la retta U_1U_2.

4) *Modo di ricavare le* ∞^1 *rette omologhe della retta immagine di* U_3 *mediante le* (2)

Consideriamo il punto corrente P di una delle coniche osculatrici di coordinate P (Km , Km^2 , $m^2 - m - K$)

Esso è rappresentato, posto:

$$K = K_1 u + K_2 \varepsilon \; ; \qquad m = m_1 u + m_2 \varepsilon$$

dalla matrice:

$$\begin{vmatrix} K_1 m_1 & K_2 m_1 + K_1 m_2 & K_1 m_1^2 & m_1^2 K_2 + 2 m_1 m_2 K_1 & m_1^2 - m_1 - K_1 & 2 m_1 m_2 - m_2 - K_2 \\ 0 & K_1 m_1 & 0 & K_1 m_1^2 & 0 & m_1^2 - m_1 - K_1 \end{vmatrix}$$

e quindi dà luogo alla retta della congruenza di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = K_1 m_1 \\ y_1 = K_2 m_1 + K_1 m_2 + \rho K_1 m_1 \\ x_2 = K_1 m_1^2 \\ y_2 = m_1^2 K_2 + 2 m_1 m_2 K_1 + \rho K_1 m_1^2 \\ x_3 = m_1^2 - m_1 - K_1 \\ y_3 = 2 m_1 m_2 - m_2 - K_2 + \rho (m_1^2 - m_1 - K_1) \end{cases}$$

Tale retta è trasformata dalle (2) nella retta della congruenza di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x'_1 = K_1^2 m_1^2 + K_1 m_1^2 (m_1^2 - m_1 - K_1) \\ y'_1 = 2 K_1 m_1 (K_2 m_1 + K_1 m_2 + \rho K_1 m_1) + \\ \quad + K_1 m_1^2 [2 m_1 m_2 - m_2 - K_2 + \rho (m_1^2 - m_1 - K_1)] + \\ \quad + (m_1^2 - m_1 - K_1) - (m_1^2 K_1 + 2 m_1 m_2 K_2 + \rho K_1 m_1^2) \\ x'_2 = K_1^2 m_1^3 \\ y'_2 = K_1 m_1 (m_1^2 K_2 + 2 m_1 m_2 K_1 + \rho K_1 m_1^2) + \\ \quad + K_1 m_1^2 (K_2 m_1 + K_1 m_2 + \rho K_1 m_1) \\ x'_3 = K_1^2 m_1^4 \\ y'_3 = 2 K_1 m_1^2 (m_1^2 K_2 + 2 m_1 m_2 K_1 + \rho K_1 m_1^2) \end{cases}$$

cioè sviluppando e semplificando:

$$\begin{cases} x'_1 = K_1 m_1^4 - K_1 m_1^3 \\ y'_1 = 6 K_1 m_1^3 m_2 - 3 K_1 m_1^2 m_2 + 2 \rho K_1 m_1^4 - \\ \quad - 2 \rho K_1 m_1^3 + K_2 m_1^4 - K_2 m_1^3 \\ x'_2 = K_1^2 m_1^3 \\ y'_2 = 2 K_1 K_2 m_1^3 + 3 m_1^2 m_2 K_1^2 + 2 \rho K_1^2 m_1^3 \\ x'_3 = K_1^2 m_1^4 \\ y'_3 = 2 K_1 K_2 m_1^4 + 4 K_1^2 m_1^3 m_2 + 2 \rho K_1^2 m_1^4 \end{cases}$$

Dividendo per m_1^2 e facendo tendere m_2 a zero si ha:

$$\begin{cases} x'_1 = K_1 m_1^2 - K_1 m_1 \\ y'_1 = 2\rho K_1 m_1^2 - 2\rho K_1 m_1 + m_1^2 K_2 - K_2 m_1 \\ x'_2 = K_1^2 m_1 \\ y'_2 = 2 K_1 K_2 m_1 + 2\rho K_1^2 m_1 \\ x'_3 = K_1^2 m_1^2 \\ y'_3 = 2 K_1 K_2 m_1^2 + 2\rho K_1^2 m_1^2 \end{cases}$$

Dividendo ancora per un m_1 si ha:

$$\begin{cases} x'_1 = K_1 m_1 - K_1 \\ y'_1 = 2\rho K_1 m_1 - 2\rho K_1 + m_1 K_2 - K_2 \\ x'_2 = K_1^2 \\ y'_2 = 2 K_1 K_2 + 2\rho K_1^2 \\ x'_3 = K_1^2 m_1 \\ y'_3 = 2 K_1 K_2 m_1 + 2\rho K_1^2 m_1 \end{cases}$$

Facendo tendere infine m_1 a zero si ha:

$$\begin{cases} x'_1 = -K_1 \\ y'_1 = -2\rho K_1 - K_2 \\ x'_2 = K_1^2 \\ y'_2 = 2 K_1 K_2 + 2\rho K_1^2 \\ x'_3 = 0 \\ y'_3 = 0 \end{cases}$$

che al variare del parametro ρ rappresenta un punto che descrive la retta di Γ congiungente i due punti le cui coordinate sono le righe della matrice:

$$\begin{Vmatrix} -K_1 & -K_2 & K_1^2 & 2K_1K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_1 & 0 & K_1^2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

cioè la retta della congruenza immagine del punto biduale $P'(-K,K^2,0) \equiv \equiv P'(-U, K, 0)$.

Al variare poi della conica nel fascio, cioè al variare di K, P' descrive la retta $U_1 U_2$.

Himàlaya nell'arte e nella scienza

Nota del socio ordinario **Giuseppe De Lorenzo**

(Adunanza del dì 15 maggio 1954)

Sunto. — In questa Nota si espone brevemente quel che la grande catena di montagne del Himâlaya ha rappresentato, per tre millenni, nella vita spirituale dell'Oriente: specialmente nelle concezioni religiose e nelle manifestazioni artistiche dell'India e del Tibet; e quel che essa ha fornito, in questi ultimi due secoli, alle cognizioni scientifiche, geodetiche, geografiche e geologiche, ed allo esercizio alpinistico dell'Occidente.

Il nome sanscrito *Himâlaya*, che significa *sede della neve* (da *hima*, freddo, ghiaccio, neve, eguale al greco χεῖμα ed al latino *hiems*, ed *âlaya*, sede), insieme con i sinonimi e gli aggettivi *himavâ*, *himavat*, *himavant*, *himaprasta*, etc., denota da tre millenni l'ingente ed eccelsa catena di montagne, compresa tra l'India ed il Tibet, e tra i due mari, di Arabia e del Bengala, dell'Oceano Indiano. Tale fu il nome, che ad essa diedero i primi immigranti aryani nell'India, quando cantarono (*Rigveda*, III, 33) i fiumi della valle dell'Indo, che scendono muggendo da quelle alte nevi; e tale fu accolto, e fonicamente tradotto dai loro congiunti e quasi contemporanei cognati indoeuropei di Occidente: gli antichi Greci, che tradussero Himâlaya in Ἴμαυς, ed i Latini in *Imaus*; ed il grande naturalista Plinio spiegò, che quel nome presso gli indigeni significa appunto *nevoso*: « *Imaus incolarum lingua nivosum significat* ».

La visione delle nevi perenni su quelle cime inaccessibili, estollentisi a circa novemila metri sul livello dei mari contigui, fece sorgere nella fantasia religiosa di quegli antichi Hindu la concezione, che esse fossero le sedi di divinità celesti: sì che diedero alla stessa, purissima neve, figlia del monte *Himavat*, secondo le sue varie apparenze luminose, ed alle cime, su cui risplende, i nomi divini, che ancor oggi molte di esse cime portano: *Nandadevî*, lieta dea; *Pârvatî*, la montanara; *Durga*, l'inaccessibile; *Umâ*, la splendente; *Gaurî*, la vergine fulgente, bianca, bionda, rosea: secondo la varia luce dell'alba, dell'aurora, del meriggio e del tramonto; *Annapurna*, l'altrice, l'*alma mater*, che, con le acque sgorganti dai suoi fianchi e defluenti nelle valli e nei piani dell'India, produce l'esuberante mondo vegetale, alimento del mondo animale ed umano. E lo sposo, il signore di tale splendente figlia del *Himâlaya* è *Gaurîsankar*, il grande

dio, *Mahâdeva*, il terribile dio *Shiva*, il dio della distruzione e della morte; che è, al tempo stesso, anche il dio della rigenerazione e della vita, di cui porta nel *lingam* il simbolo fallico; ma è anche il grande asceta, il prototipo di tutti gli asceti, i vati vedici, gli eremiti ed i santi anacoreti; i quali da tre millenni hanno vissuto e vivono nelle forre e sulle balze del sublime *Himâlaya*.

Mentre gti aryani delle valli dell'Indo e del Gange elevavano tale grandiosa costruzione mitico-himâlayana, i loro contemporanei consanguinei indoeuropei dell'antica Grecia costruivano un'analoga concezione, stabilendo sulla sommitâ del loro più alto monte settentrionale, l'Olimpo, a 2918 metri sul mare, la sede dei loro dei; alla quale tentavano invano di dare la scalata, dalle loro più basse alture del Pelio e dell'Ossa, i titani terrigeni, che, vinti e sconfitti, erano durabilmente ricacciati sotterra. Una simile lotta era anche immaginata nell'India, tra le divinità celesti, *deva* o *sura*, e le terrestri, *asura*, annidate nelle caverne e nei baratri dei monti: anch'esse sconfitte e calcate sotto la terra. Si possono interpretare tali lotte naturalisticamente, come conflitti tra le scure forze telluriche e le luminose potenze dell'aria e del cielo, che finiscono sempre con avere la vittoria definitiva; o storicisticamente, come le guerre vittoriose dei bianchi invasori indoeuropei sulle scure popolazioni aborigene, dravidiche nella India, mediterranee nell'antica Grecia. Comunque si interpretino, le due analoghe concezioni mitiche ebbero sorte diversa. Quella della Grecia si chiuse con le epopee di Omero e di Esiodo e con le tragedie prometeiche di Eschilo, in cui era rappresentata; mentre quella dell'India è rimasta per tre millenni e resta ancora materia vivente, sia negli antichissimi inni vedici che nelle grandi epopee del *Mahâbhârata* e del *Râmâyana*, e nelle opere liriche e drammatiche posteriori, fino a giungere alle attuali rappresentazioni e danze, sacre e profane. Questo diverso svolgimento delle due concezioni cognate può esser dipeso dal fatto, che gli antichi Greci fecero dell'Olimpo la sede dei soli dei, inaccessibile agli uomini, mentre gli Hindu considerarono le cime nevose del *Himâlaya* come i punti di approdo e di appoggio delle divinità celesti, che scendono dai loro diversi cieli, per mettersi in contatto con gli uomini più degni; e come, mi sia concessa l'immagine, il trampolino, da cui tali uomini più degni possono ascendere in cielo ad identificarsi, od immaginare di identificarsi con gli dei, fino al grande Brahma: così come il nostro Dante salì, od immaginò di salire, dalla sommità del monte del *Purgatorio* ai vari cieli del *Paradiso*, e scrisse:

> La gloria di Colui che tutto muove,
> Per l'universo penetra e risplende
> In una parte più e meno altrove.

Nel ciel, che più della sua luce prende,
Fu' io; e vidi cose, che ridire
Nè sa, nè può chi di lassù discende.

E non si può ridire, aggiunge DANTE, perchè *trasumanar significar per verba non si potrìa.*

L' esempio e la parola di DANTE ci aiutano a comprendere, come l' Italia, a differenza della Grecia, che pur fu sua maestra, ha mantenuto, alla pari dell' India, per più di due millenni, il patrimonio delle sue concezioni mitiche, religiose ed artistiche, se anche modificandole e trasformandole. Anzitutto l' Italia, il bel paese ch' Appennin parte e il mar circonda e l' Alpe, è, fisicamente, geograficamente, se non geologicamente, la parte della Terra, che più rassomiglia, se anche in proporzioni minori, all' India. Come l' India, infatti, è una penisola, fiancheggiata dal mare di Arabia e da quello del Bengala e protesa nell' Oceano Indiano: così l' Italia è una penisola, fiancheggiata dal mar Ligure e dall' Adriatico e protesa nel Mediterraneo; come l' India è sormontata a settentrione dalla grande catena del Himâlaya, che torreggia a circa novemila metri sul mare: così l' Italia è chiusa a settentrione dalla grande catena delle Alpi, che assurgono a circa cinquemila metri sul mare; come l' India peninsulare è percorsa da nord a sud dalle minori catene montuose dei Vindhya, degli Aravalli e dei Ghats, con antiche espansioni di rocce vulcaniche: così l' Italia è percorsa da nord a sud dalla catena dell' Appennino, con le sue manifestazioni eruttive, antiche ed attuali; come tra l' India peninsulare ed il baluardo del Himâlaya si stende, da occidente ad oriente, l' ampia valle del Gange, che accoglie e convoglia nel golfo del Bengala le acque defluenti dal Himâlaya e dai monti peninsulari: così tra la penisola appenninica e la catena delle Alpi si stende la valle del Po, che accoglie e convoglia nell' Adriatico le acque defluenti dalle due formazioni montuose; come l' India è chiusa a sud dall' isola di Seilan, che s' innalza, nel monte Pidurutalagalla, a 2538 metri sull' Oceano Indiano: così l' Italia termina a sud con l' isola di Sicilia, che culmina con l' Etna a 3263 metri sul Mediterraneo. La differenza geologica consiste nel fatto, che la catena del Himâlaya s' è formata col corrugamento, lo scivolamento, il frantumamento ed il sollevamento dei sedimenti, formatisi nell' antico mare mesozoico-cenozoico Tethys, che si stendeva dall' Atlantico all' Oceano Indiano, spinti da nord, dal Tibet, verso sud, contro il tavolato peninsulare indiano del Dekkhan, che è un frammento dell' antica terra di Gondvana, che si stendeva dall' Africa orientale all' Australia; mentre le Alpi e l' Appennino si sono formati per un simile corrugamento di sedimenti, spinti in senso contrario, da sud a nord, contro il resistente tavolato germanico. Ma il risultato geografico del paesaggio è rimasto, in proporzioni minori, quasi il medesimo.

A questa simiglianza geografica si deve aggiungere una certa affinità

psicologica tra gli abitatori delle due penisole. A differenza degli antichi Greci, che avevano intuizioni e visioni mitiche, religiose ed artistiche, nitide, precise, concrete, gli Italici, specialmente gli antichi Romani, avevano delle forme e dei fenomeni del mondo concezioni vaghe ed astratte, simili un poco a quelle degli Hindu; che riassumevano in un panteismo universale, per cui tutte le cose e le azioni, inorganiche ed organiche, vegetali, animali ed umane, venivano deificate, ed i *nomina* diventavano *numina*. Così, p. es., la dea *Statuna* era quella, che faceva stare impiedi il bimbo, la *Levana* quella, che lo sollevava, e così via, per innumerevoli *nomina* e *numina*, fino a giungere alla dea *Cloacina*, al dio *Stercutius* ed al dio *Crepitus*; al quale il Flaubert ha dedicato tutta una pagina de *La tentation de saint Antoine*. In conseguenza di tale modo di sentire e di concepire il mondo, *templa*, *delubra* e *fana* venivano eretti sui monti e nelle valli delle Alpi e dell' Appennino. E quando, verso la fine della Repubblica ed il principio dell' Impero, cominciarono ad arrivare in Italia le onde delle religioni dell' Oriente, che culminarono nell' avvento del Cristianesimo, quei sacrari pagani, col processo di trasformazione e di assimilazione, così delicatamente esposto da Giovanni Pascoli nel suo bellissimo poemetto latino *Fanum Apollinis*, si mutarono gradatamente in santuari cristiani: quali gli eremi camaldolesi e francescani della Toscana e della Umbria, ed i chiostri e conventi benedettini della Campania, Montecassino, Montevergine, Trinità di Cava, e così via; in modo che il culto, dedicato da quegli antichi italici ai *geni loci* dei monti e delle valli delle Alpi e dell' Appennino, s' è, attraverso i secoli, lentamente trasformato nella venerazione, nell' adorazione e nelle mete di pellegrinaggio ai santuari delle madonne e dei santi protettori locali, disseminati per tutti i monti e le valli d' Italia.

Un quadro simile, in maggiori proporzioni, si ritrova nell' India. L' indologo Helmuth von Glasenapp ha descritto ed illustrato centinaia di tali sante sedi dell' India ed i siti di pellegrinaggio degli Hindu, dei Jaina e dei Buddhisti, con le loro leggende ed i loro culti, nella sua bella opera *Heilige Stätten Indiens*, München, 1928. Tra tali luoghi santi del Himâlaya e dell' India, anzi di tutta la grande Asia, quello che sopra tutti eccelle è il sacro monte *Kailâs*, situato nel Tibet, a 31° 4′ 2″ di latitudine nord e 81° 18′ 50″ di longitudine est da Greenwich. *Kailâs* è il nome hindostano moderno, adottato in Asia e nel mondo scientifico internazionale, derivato foneticamente dall' antico nome sanscrito *Kailâsa*. I Tibetani lo chiamano anche *Kang-rinpoce*, o monte-gioiello, oppure *Kangri*, il monte di ghiaccio. Esso è per gli asiatici il monte sacro per eccellenza: oggetto di venerazione e meta di pellegrinaggio per circa un miliardo di hinduisti, giainisti e buddhisti, stabili o nomadi, sulle terre comprese tra l' Oceano Indiano ed il Pacifico. Per essi quel monte rappresenta quel che è Gerusalemme per i cristiani, la Mecca per i maomettani: non perchè lassù sia sorto o

morto un loro profeta o redentore; ma perchè quel gioiello di monte rappresenta per essi quanto v'è di più sublime, o divino, o santo, o sovrumano, sulla terra. Ma tale sua rimonanza il *Kailasa* non la deve alla sua eccelsa altezza. In confronto dei maggiori colossi himâlayani e transhimâlayani, come l'Everest di 8882 metri, il K^2 del Karakoram con 8611 metri, il Kincinginga con 8580 metri, etc., esso resta inferiore, giungendo appena a 6650 metri sul livello del mare. Ma, in compenso di tale minore altezza, il *Kailâsa* ha una forma ed una posizione tali, che lo rendono ben degno di essere oggetto di adorazione dell'Asia. Anzitutto esso si trova quasi nel nodo centrale delle più grandi catene montuose della terra: Himâlaya, Transhimâlaya, Karakoram e Kuenlun. Da quel nodo centrale e dalle sue vicinanze discendono, per gole profonde e con muggiti sonanti, i fiumi possenti, che portano le acque, scaturite da quelle alte, gelate solitudini, a fondersi di nuovo con i flutti dell'Oceano Indiano, donde s'erano evaporate: l'Indo, la Satlej, la Ganga (Gange) ed il Brahmaputra. Ed in quel nodo centrale, sopra una base di 4000 metri sul mare, si eleva appunto il *Kailâsa*, come un prisma tetraedrico piramidato, di più di duemila metri, con facce verticali di calcare giallo scuro mesozoico, e con la cuspide tetraedrica terminale, scintillante di ghiacci e di nevi perenni, quasi come diamante splendente in cielo, incastonato sulla turchese del contigno lago sacro di Manasoravara, creato dalla mente di Brahma.

Ispirato appunto dal *Kailâsa*, il geniale studioso dell'arte indiana E. B. Havell, il quale aveva nel 1908 pubblicato la sua opera sulla scultura e la pittura indiana, *Indian Sculptur and Painting*, e nel 1911 l'altra sugli ideali dell'arte indiana, *The Ideals of Indian Art*, nel 1924 pubblicò l'altro suo bel libro *The Himâlayas in Indian Art;* nel quale indicò lo *Himâlaya*, e specialmente il *Kailâsa*, come il cuore propulsore di tutta l'arte indiana. La visione del *Kailâsa* egli non l'aveva per conoscenza diretta, ma solo pel tramite di altrui anteriori descrizioni *de visu*, specialmente di quelle, apparse contemporaneamente, nel 1909, di due uomini che ne avevano fatto la circambulazione di rito, e che erano gli antipodi l'uno dell'altro, non solo geograficamente, ma anche per razza, religione e cultura: l'uno, il grande esploratore vikingo e cristiano Sven Hedin, l'altro il monaco buddhista giapponese Ekai Kavaguchi; ai quali poi si aggiunse, come terzo, nel centro, il *yogin* indiano Bhagwan Shri Hamsa; che pubblicò nel 1934 presso l'editore Faber and Faber, in Londra, con prefazione del poeta W. B. Yeats, il suo bel libro sul sacro monte, *The holy Mountain, being the Story of a Pilgrimage to Lake Manas and of Initiation on Mount Kailâs in Tibet.*

Sven Hedin nei tre grandi volumi del suo *Transhimâlaya*, pubblicati tra il 1909 ed il 1912, diede le belle descrizioni del *Kailâsa* e del *Mànasarovâra;* che si accordano così bene con le trimillenarie concezioni e rappresentazioni del pensiero e dell'arte dell'India. Il *Kailàsa*, dice Sven

Hedin, è la sede degli dei del mondo religioso indiano ed un'arena delle azioni eroiche delle sue epopee. Ai suoi piedi si stende, come in sogno, il sacro lago di *Mânasarovâra*, ora calmo e lucido come uno specchio, che riflette il sole e la luna e le stelle, ora battente e sonante sulle sponde all' unisono con la cadenza delle nubi del monsone estivo, nel loro cammino celeste, dagli ardenti piani dell' India verso l' alto, gelido Tibet. Esso è il più famoso ed il più sacro di tutti i laghi della terra, meta di pellegrinaggio e di devozione di innumerevoli indiani, ma anche di tutti i buddhisti dell' Asia e dei lamaisti del Tibet; i quali lo chiamano « il gioiello dei laghi », come chiamano « il gioiello dei monti » il *Kailâsa*. Questa comune adorazione è certo determinata dalla loro imponente bellezza, che sembra esser cosa più celeste che terrena e fa venire le lagrime agli occhi di chi vede per la prima volta quel grandioso, meraviglioso paesaggio. Il lago sta come una enorme turchese, incastonata tra due giganti della terra, il *Kailâsa* a nord ed il *Gurla Mandata* a sud, con lo splendore adamantino delle loro nevi perenni. Con questa descrizione entusiastica del grande esploratore svedese si accorda pienamente quel che scrisse il monaco buddhista giapponese nel suo libro *Three Years in Tibet*, Madras, 1909: « A circa tredici miglia di distanza si aprì innanzi a noi una vista che io non dimenticherò mai, sì grande ne era la scena. Ecco, eravamo innanzi al lago sacro *Mânasarovâra*, con le sue acque placide e chiare, ed il monte *Kailâsa* sulla sua sponda nord-ovest: quadro unico e sublime, di un paesaggio solenne e silente, in selvaggia solitudine. Il *Kailâsa* torreggia così maestosamente tra i picchi circostanti, che mi pareva di vedere in esso il nostro glorioso signore Buddha, predicante calmo e sereno ai suoi discepoli e seguaci. La fame e la sete, i pericoli dei fiumi impetuosi e delle tempeste agghiaccianti, la pena dei carichi sulle spalle, l' ansietà dei deserti senza sentieri, l' esaurimento e le lacerazioni e tutti i tormenti, pei quali ero passato, sembrarono polvere, lavata e purificata dalle acque spirituali del lago e dalla scena del monte, nella cui visione io raggiunsi il grado spirituale del non-io. » Il che sembra quasi un' eco dei famosi versi di Byron: « Non sono le montagne, le onde ed il cielo una parte di me e dell' anima mia, com' io di loro? Io non vivo in me stesso, ma divento parte di quel che è intorno a me, ed a me alte montagne sono un sentimento. » Con queste descrizioni del *Kailâsa* si capisce, come Havell faccia di esso e del Himâlaya lo spirito animatore di tutta l' arte indiana, da lui descritta: cioè della pittura, della scultura e dell' architettura; di cui esiste appunto in India, ad Ellora, il famoso tempio *Kailâs*, del settimo secolo dopo Cristo, tratto d' un sol pezzo, con tutte le sue migliaia di modanature e sculture, dalla costa del monte, con una incisione di circa cento metri di lunghezza, cinquanta di larghezza e trenta di altezza: lavoro formidabile, di concezione, di scalpello e di cesello, che non ha pari sulla terra.

Naturalmente nell' India, come dappertutto, non sono state soltanto le

arti percepibili mediante la vista ed il tatto, quali l'architettura, la scultura e la pittura, ad inspirarsi al *Himâlaya :* che anzi esse non hanno fatto, che tradurre in pietre ed in colori le intuizioni, le visioni, i miti e le leggende, che l'arte più pura ed incorporea, percepibile mediante l'udito, ha con la parola trasmesso a quelle durante più di tre millenni ; a cominciare dagli antichi innivedici, passando per l'insegnamento religioso e filosofico ed attraverso tutta l'immensa letteratura e la poesia epica, lirica e drammatica, fino agli ultimi poeti moderni, quali i Tagore e Bankimcandra, autore dell'inno nazionale *Bande Mâtaram,* e Dvijendralal Rây, che canta sempre la sua grande terra natale come la Madre India, col capo coronato di neve, il corpo cinto dal velo fluttuante del mare ed i piedi, simili a fiori di loto, posati sul suolo fragrante. Per dare un esempio di trasposizione della parola in arte plastica, basti solo accennare alle migliaia di figure, scolpite sulle rocce granitiche di Mâmallapuram, sulla costa del mar del Bengala, a cinquanta chilometri a sud di Madras.

Senza ornamenti immaginosi, ma con semplicità nitida, marmorea, l'indicazione del *Himâlaya* si trova nelle strofe 422-423 dell'antico testo buddhistico *Suttanipâto*, del sesto secolo avanti Cristo ; nelle quali il Buddha Sakyamuni, nato appunto alle falde del *Himâlaya* nepalese e disceso dai monti nativi nella valle del Gange, a Rajagaham, oggi Rajgir, capitale del regno di Magadhâ, oggi Bihar, espone al re Bindusaro la terra e la gente di sua nascita : « *Ujum janapado raja himavantassa passato... Lassù, o re, v'è un paese, al piede del Himavant, dotato di forza e di ricchezza, confinante coi Kosali. Da tale popolo discendo : sono di nascita un Sakyo. A tale casa ho rinunziato e non bramo più godimento. Ho riconosciuto il godimento quale dolore e ne cerco lo scampo. Procedo pugnando, e di ciò si rallegra l'animo mio.* Il geniale traduttore del *Suttanipâto*, Karl Eugen Neumann, fa giustamente notare, che l'eco di tali parole si sente, dopo mille anni, nei versi iniziali del poema *Kumârasambhava* di Kalidasa : « *Astiuttarasyam disi devasmâ Himâlaya nâma nagâdhiraja...*

È nel settentrion divino un ente,
Himâlaya nomato, re dei monti :
In ambo i mari le radici affonda,
Dell'ampia terra quasi dà misura.

Col grande poeta Kalidasa le descrizioni del *Himâlaya* entrano nella conoscenza e nella comprensione anche del nostro mondo occidentale moderno. Quando nel 1789 apparve la traduzione inglese del suo famoso dramma *Sakuntala*, fatta dal Jones e ritradotta dal Forster in tedesco nel 1791, Goethe ne rimase incantato e scrisse su esso i notissimi distici : « Se vuoi comprendere i fiori della primavera ed i frutti dell'autunno ;

se vuoi comprendere quel che invita ed incanta, quel che spazia e nutrisce; se vuoi comprendere con un sol nome il cielo e la terra: io ti nomino *Sakuntala*, e con ciò tutto è detto. » E quando poi uscì la traduzione inglese di WILSON del *Meghadûta*, lo stesso GOETHE espresse in *Zahmen Xenien* la sua ammirazione con i versi: « Che dunque si vuol sapere di più piacente? *Sakuntala* e *Nala* bisogna baciarli. E *Meghadûta*, il nuvolo messaggero, chi non lo invia volentieri ai parenti in spirito? » In tale poemetto KALIDASA immagina che un *yaksa*, o genio della montagna, esiliato per un anno nelle ardenti pianure dell'India e languente d'amore per la sposa, lasciata lassù, vedendo, al principio della stagione delle piogge, una nube del monsone estivo salire dall'Oceano Indiano verso le montagne del *Himâlaya*, la invoca e la prega, di recarsi al monte *Kailâsa*, presso dove è rimasta la sua sposa, a portarle sue notizie; e descrive al nuvolo messaggero l'itinerario ed il paesaggio, che deve transvolare, per giungere lassù, dove il Kailâsa nelle sue nevi risplende come il riso di *Siva*, il grande dio. Le parole, che il *yaksa* rivolge alla nube, rassomigliano stranamente a quelle, che esprime un'altra nube, nel descrivere il suo viaggio dal mare ai monti, nel bellissimo poemetto *The Cloud*, composto da SHELLEY nel 1820. Invece, nel settimo atto del dramma *Sakuntala* è descritto il cammino inverso, quando *Matali*, l'auriga di *Indra* e pilota dell'aliante celeste, riporta il re, sposo dimentico di *Sakuntala*, verso le alture del *Himâlaya* e le pianure dell'India. Ed il re, durante il *vol plané*, dice al suo pilota, come direbbe un moderno passeggero al pilota di un aeroplano: « Nella rapida discesa il mondo degli uomini offre un aspetto singolare. Le cime dei monti sembrano sollevarsi, mentre disotto si distendono i campi. Gli alberi, prima nascosti nelle loro corone, ora mostrano i tronchi ed i rami. I fiumi, che prima parevano fili sottili, ora rivelano i loro ampli letti ondosi. Mi sembra, come se la terra mi sorga incontro, come da un abisso. » Così il poeta nella sua fantasia vedeva e descriveva quel che solo dopo più di mille anni realmente s'è visto col primo volo della spedizione HOUSTON sull'*Everest*, del 1933, descritto nel volume *First over Everest*, London, 1933, e che ora si ripete regolarmente, realizzando la fantasia di KALIDASA e l'antico sogno dei Greci e dei Romani, di volare in cielo e scendere sotterra, deprecato da ORAZIO:

Expertus vacuum Daedalus aera
Pinnis non homini datis;
Perrupit Acheronta Herculeus labor.
Nil mortalibus arduist,
Caelum ipsum petimus stultitia, neque
Per nostrum patimur scelus
Iracunda Iovem ponere fulmina.

Così il contatto tra la sapienza e la santità dell'India e la scienza e l'attività dell'Europa, iniziatosi con la campagna di Alessandro Magno e conchiusosi, dopo due millenni, nel 1751, con la penetrazione degli Inglesi, guidati da Robert Clive, s'è sempre più approfondito, sì da dare oggi una vasta e mutua comprensione, anche per ciò che riguarda il valore artistico, scientifico ed alpinistico del *Himâlaya*. Di tale mutua comprensione l'esempio più vistoso ci è offerto dal grande scrittore inglese, nato e cresciuto in India, Rudyard Kipling; il quale nel noto suo romanzo *Kim* ci ha dato la descrizione del vecchio *lama* buddhista tibetano, disceso dalle nevose alture nelle valli dell'India, per cercarvi i ricordi del suo Maestro; e nel secondo libro della giungla ci ha narrato il miracolo di *Purun Bhagat*: del nobile e grande uomo di stato indiano, che si ritira a vita contemplativa nel Himâlaya, dove gli tengono compagnia le scimmie, l'orso ed il *barasingh*, il grande cervo di quelle montagne. Il racconto di Kipling potrebbe sembrare una sua fantastica invenzione, se non fosse confermato dalle testimonianze indiane di vari millenni e da quelle occidentali dei viaggiatori ed esploratori europei di quest'ultimo secolo; tra cui mi piace di ricordare quella del dottor Kurt Boeck, che nelle sue *Indische Gletscherfahrten*, Leipzig 1900, descrive come, essendo giunto all'estremità del ghiacciaio di Milam, alle falde della *Nandadevi*, a circa 4000 metri di altezza, mentre si beava nello spettacolo magico delle nevi perenni, specchiantisi nelle acque del lago alpino, perduto in immensa solitudine, vide, con sua somma sorpresa, apparire, su una rupe sormontante il ghiacciaio, la figura nuda di un *sannyasin*, accompagnato da un cane e da un grande cervo, che disparvero poi come una magica visione. « Giunsi solo a notte avanzata a Milam » egli conchiude « fuori di me dallo stupore per questo avvenimento quasi incredibile, ma corrispondente alle speranze, da me nutrite riguardo alla miracolosa terra indiana. »

Simili anacoreti himâlayani sono anche descritti da Sven Hedin, nella sua opera *Transhimalaya*, e dal maggiore L. A. Waddel, nel suo libro della spedizione inglese a Lhasa del 1903-1904, *Lhasa and its Misteries*. Il loro prototipo mitico è, come ho già detto, il dio *Siva*, il grande dio, *mahadeo*, che dimora sulla cima gelata del *Kailâsa*. Il loro antenato storico è il santo eremita e poeta tibetano Milarepa, quasi contemporaneo del nostro san Francesco d'Assisi; al quale molto rassomiglia, per fervore d'ascesi ed ispirazione di poesia. Come san Francesco si compiaceva degli eremi delle Carceri e della Verna, così Milarepa (di cui la vita e l'opera sono state descritte da Jacques Bacot nel suo libro *Le poète tibétain Milarépa*, Paris 1925) visse e morì in una grotta dei fianchi settentrionali del monte *Everest*.

Intanto il dominio inglese dell'India, in questi ultimi due secoli, ha schiuso al mondo le porte della conoscenza di quella regione. Le pubblicazioni individuali di scrittori, viaggiatori, esploratori ed alpinisti, e quelle

collettive dei *Trigonometrical · Geographical · Geological · Archaeological · Surveys of India,* ci hanno fatto conoscere i tesori materiali e spirituali dell' India in generale, e del *Himâlaya* in particolare. Per quest' ultimo è di grande importanza l' opera, pubblicata nel 1907-1908 a Calcutta, dal colonnello S. G. Burrard, soprintendente dell' ufficio trigonometrico, e da H. A. Hayden, soprintendente dell' ufficio geologico: *A Sketch of the Geography and Geology of the Himalaya Mountains and Tibet;* nella quale sono raccolti tutti i dati, riguardanti la morfologia montana e fluviale e la costituzione geologica della catena del *Himâlaya.* Essa si stende per 2500 chilometri in lunghezza e 250 in larghezza; con altezza media dei passi tra 5000 e 5500 metri; con circa 750 picchi alti tra 6000 e 7000 metri; 120 tra 7000 e 7800 metri; 11 tra 7800 e 8100; e 5 superiori ai 8100 metri sul mare; sui quali tutti eccelle, a 8882 metri, il monte *Everest.* La storia dell' *Everest,* che da un trentennio attrae l' attenzione di tutto il mondo scientifico ed alpinistico, è delle più interessanti. Esso fino all' anno 1852 era, per l' ufficio trigonometrico dell' India, un picco innominato, il *Peak XV* del Himâlaya. Ma in quell' anno l' indiano Radhanath Sikhdar, capo dei calcoli geodetici di quell' ufficio, annunziò al soprintendente, sir Andrew Waugh, che il picco XV, in base ai rilievi trigonometrici, effettuati da vari punti, a circa 240 chilometri di distanza, dai topografi indiani, risultava essere la cima più alta del *Himâlaya,* di 29002 piedi inglesi, ossia 8840 metri sul livello del mare. Misure ulteriori, continuate fino ad oggi, hanno dato valori più elevati: di 8882 e 8888 metri sul livello del mare. Il che significa, che la catena del *Himâlaya* è, come tutte le cose dell' universo, in continuo movimento, e che la cima del picco XV, o monte *Everest,* in quest' ultimo secolo s' è elevata ancora di una cinquantina di metri sul mare. Ne danno prova i grandi terremoti, che spesso squassano quei monti, come scuotono le nostre Alpi e l' Appennino. Giustamente Goethe, nelle notte classica di Valpurga, della seconda parte del *Faust,* fa esclamare da *Seismos,* il terremoto: « E se io non avessi scosso e spinto, come sarebbe questo mondo così bello? Starebbero forse i vostri monti lassù, nello splendido, puro azzurro dell' etere, se io non li avessi sollevati a pittoresca, incantata visione? ». E, prima di Goethe, il suo grande fratello spirituale, Shakespeare, in *As you like it,* atto III, sc. 2, v. 181, dice, che le montagne possono essere rimosse con terremoti e così incontrarsi: « *Mountains may be removed with earthquakes and so encounter* ». I grandi poeti hanno spesso intuizioni più profonde delle esperienze e dei calcoli di noialtri comuni scienziati.

Ma sir Andrew Waugh, quando apprese, che quell' innominato picco XV era la più alta vetta della terra, pensò di battezzarlo, dandogli il nome del suo predecessore, sir George Everest. E nel 1857, quando la Reale Società Geografica inglese gli decretò, per i suoi lavori, la medaglia d'argento, il Presidente disse, come è riportato nel *Journal of the Royal*

Geographical Society del 1857: « Dopo che si è determinato, che tra tutti i monti, dai quali discendono gli affluenti del Gange, il più alto è nel *Himâlaya,* e dopo che s' è trovato che questo punto culminante, a 27°56′ di latitudine nord e 86°53′ di longitudine est, è alto 29002 piedi sul mare e quindi 8580 più alto del famoso Kancengiunga nel Nepal, il colonnello Andrew Waugh ha per gratitudine e con piena giustificazione dato a questa più alta vetta del mondo il nome del suo illustre maestro, chiamandolo monte *Everest* ». Ma questo battesimo eteroclito suscitò, giustamente, un vespaio, che ancora, dopo un secolo, non s' è calmato. Insorse contro di esso, prima di tutti, Brian Houghton Hodgson, che era stato residente inglese nel Nepal dal 1821 al 1843, ed è noto per le sue grandi scoperte e raccolte di manoscritti buddhistici in quel paese. A lui fecero seguito valorosi geografi ed alpinisti, quali Schlagintweit, Howard-Bury, Bruce, Younghusband, Douglas W. Freshfield ed altri: tutti sostenendo, che bisognasse dare a quel monte sublime il nome indigeno, locale, e non quello di un estraneo, che non aveva alcun merito nella sua scoperta. Ed il nome indigeno è, per concorde avviso, il tibetano *Ciomo-lungma,* che significa dea madre dei monti o dea madre del paese. Sven Hedin, nel suo volume *Mount Everest,* Leipzig 1926, si schierò con gli oppositori del nome inglese, facendo anche notare, che il nome tibetano *Ciomo-lungma* si trova già nelle carte della Cina e del Tibet, fatte eseguire dall' imperatore Kang-hi, della dinastia manciù, nel 1708, dai missionari francesi, con l' aiuto di operatori indigeni, e riprodotte nella *Carte generale* du Tibet au Bouttan et des Pays de Kashgar et Hami, dressée sur les Cartes et Memoires des RRPP Jesuites de la Chine et accordées avec la situation costante de quelque Pays voisins, par le S.r d' Anville, Geographe Ord.re du Roi, Avril 1733. Malgrado questi illustri difensori del nome indigeno, e le loro buone ragioni, ormai il più alto monte della terra è universalmente conosciuto sotto il nome inappropriato di monte *Everest;* contro il quale per ora non c' è nulla da fare, perchè i nomi, come i vocaboli, sono determinati, non da ragioni teoriche, ma dall' uso, e sono soggetti a tutte le vicissitudini di vita e di morte, cui soggiacciono tutte le forme ed i fenomeni del mondo. La ragione ce la dice Orazio, nel suo libro *de arte poetica:*

> Debemur morti nos nostraque...
> ... Mortalia facta peribunt:
> Multa renascentur, quae iam cecidere, cadentque
> Quae nunc sunt in honore vocabula, si volet usus,
> Quem penes arbitriumst et ius et norma loquendi.

L' uso, dunque, ha fatto dare, per ora, il nome improprio di *Everest* al più alto monte del Himâlaya e della terra, che da più di trent' anni torreggia sovrano nella storia e nei fasti dell' alpinismo.

Nella storia dell' alpinismo, inteso come un nobile esercizio, diretto a salire, tra sforzi e pericoli, sulle cime dei monti più alti, senza alcun interesse o compenso materiale, s' è verificato, come anche in altri campi, un fenomeno particolare di noi Italiani; tra i quali sono sorti precursori individuali in diverse sfere di attività intellettuali o pratiche, senza che il popolo li abbia poi seguiti con la sua attività collettiva e sociale. Così, p. es., Marco Polo è stato l' antesignano degli esploratori dell' Asia; la quale poi è divenuta campo di sfruttamento coloniale e commerciale di molti popoli europei, senza alcuna partecipazione degli Italiani. Così, parimenti, Cristoforo Colombo è stato lo scopritore, ed Americo Vespucci il denominatore del Nuovo Mondo; il quale poi è stato occupato dagli Anglosassoni e dagli Iberici. Similmente il vero precursore dell' alpinismo, inteso nel senso dianzi accennato, è stato proprio un italiano, e quale italiano: nè più nè meno che Francesco Petrarca! Questi, trovandosi nel suo romitaggio di Valchiusa, in Provenza, volle, nel 1337, fare l' ascensione, insieme con suo fratello, del sovrastante monte Ventoso, di 1902 metri di altezza, e ne scrisse (*Epistolae de rebus familiaribus, lib.* IV, *ep.* 2) al suo amico Dionisio di Borgo San Sepolcro: « *Altissimimum regionis huius montem, quem non immerito Ventosum vocant, hodierno die sola videndi insignem loci altitudinem cupidate ductus, ascendi.* » Giunto esausto alla cima del monte, volse dapprima lo sguardo ad oriente « *ad partes Italiae quo magis inclinat animus* », dove si profilavano, nevose, le Alpi « *Alpes ipsae rigentes ac nivosae* »; ma non potè scorgere, ad occidente, i lontani Pirenei; mentre invece il Rodano scorreva limpido sotto i suoi occhi. Aprì allora il libro delle *Confessioni* di sant' Agostino, che aveva portato con sè, e lesse, anche per suo fratello, quel che prima gli capitò sott' occhio; che era il pensiero, che Agostino stesso aveva tratto dagli antichi pensatori e poeti, greci e latini: « *Et eunt homines admirari alta montium, et ingentes fluctus maris et latissimos lapsus fluminum, et oceani ambitum, et gyros siderum, et relinquunt se ipsos.* » E, meditando su tale pensiero, Petrarca discese dal monte.

Il pensiero e la meditazione degli antichi greci e romani e di santo Agostino e di Petrarca corrispondono a quel che scriveva l' antico pensatore cinese Lao-tse, nel sesto secolo avanti Cristo: « Senza uscire dalla porta, si può sapere il mondo; senza guardare dalla finestra, si possono conoscere le vie del cielo: più lontano si va e meno si apprende. Perciò l' uomo saggio non cammina ed arriva. » E l' eco se ne sente anche in quel che scrisse, nel 1854, quell' originale Diogene americano che fu Henry David Thoreau (1817-1862) nella sua *Conclusion of Walden:* « Rivolgi dentro di teil tuo occhio, e troverai nella tua mente mille regioni inesplorate. Percorrile, e scoprirai la tua cosmografia. » Ma gli Inglesi moderni, che hanno fondato ed organizzato l' attuale alpinismo, sono uomini di azione e di avventura, che non si fermano a contemplare

il proprio ombelico, e vogliono giungere sempre più in alto e lontano. Così hanno cominciato a salire, con l'aiuto delle guide svizzere ed italiane, le cime delle Alpi, e poi sono passati al Himâlaya ed ai Poli della Terra. Battuti, nel 1909, dall'americano PEARY nella conquista del Polo Nord, e nel 1911 dal norvegese AMUNDSEN in quella del Polo Sud, hanno diretto tutti i loro sforzi all'assalto della cima dell'*Everest*; che finalmente hanno raggiunto il 29 maggio 1953, con la spedizione del colonnello HUNT, patrocinata dal Duca di Edimburgo, Filippo MOUNTBATTEN, sicuri, che ormai nessuno più sulla terra potrà salire, coi piedi, più in alto di loro. Ma, quali e quanti sforzi eroici sono stati necessari, prima di conseguire tale splendida vittoria finale; quali somme di accurate preparazioni; quali e quanti sacrifici, tormenti, ed anche morti; e quanta emulazione, non solo tra gli stessi inglesi, ma anche con altri popoli, per giungere alla stessa vetta suprema o ad altre cime del *Himâlaya*: a cominciare dalle spedizioni italiane nel Karakoram, del Duca degli Abruzzi, Luigi di SAVOIA, nel 1909, e poi di DE FILIPPI e di DAINELLI, per finire alle spedizioni tedesche, svizzere e francesi nel *Himâlaya* centrale. Ma l'ansia e l'ambizione maggiore erano quelle, di scalare la cima dell'*Everest*; ed in ciò gli Inglesi hanno sempre avuto il primato, anche per il numero delle spedizioni. La prima di esse, del 1921, diretta da C. K. HOWARD-BURY, raggiunse i 7007 metri del Colle Nord; la seconda, del 1922, del generale C. G. BRUCE poco più in alto; la terza del 1924, di NORTON, arrivò a 8572 metri; ed allo stesso punto giunse la quarta, del 1933, con Hugh RUTTLEDGE; la quinta, del 1934, finì con la morte dell'americano WILSON, nel tentativo, di raggiungere il Colle Nord; la sesta, del 1955, fu una semplice esplorazione di Eric SHIPTON; la settima, del 1936, di nuovo con RUTTLEDGE, fallì per la precocità del monsone estivo; l'ottava, del 1938, con H. W. TILMAN, raggiunse il Colle Nord da Ovest; la nona, del 1947, del canadese DENMAN, superò il Colle Nord, giungendo a 7200 metri; la decima, del 1950, fu la spedizione angloamericana di TILMAN e HOUSTON, che si limitò ad una ricognizione del versante sud e del ghiacciaio Khumbu; l'undecima, del 1951, fu anche una esplorazione di Eric SHIPTON, del versante ovest e del Colle Sud; la duodecima, della primavera e dell'autunno del 1952, fu la spedizione svizzera diretta da CHEVALLEY, DITTERT e LAMBERT, che fece raggiungere a LAMBERT e TENZING gli 8600 metri della Cresta Sud, e preparò il terreno alla successiva, finale spedizione inglese del colonnello HUNT; che permise all'angloneozelandese HILLARY ed al nepalese TENZING, di mettere finalmente il piede, alle 11,30 del 29 maggio 1953, sugli 8882 metri dell'immacolata cima dell'*Everest*.

I successi parziali di tutte queste spedizioni all'*Everest*, e specialmente il successo totale dell'ultima, non sarebbero stati possibili, se alla preparazione, alla intelligente direzione, all'audacia ed alla tenacia degli Inglesi e degli altri europei ed americani non si fossero aggiunte la resistenza,

l'abnegazione, l'indifferenza innanzi ai pericoli ed alla morte, la serenità e la letizia dei portatori indigeni, reclutati specialmente tra gli *sherpa*, o *scerpa*: montanari della parte orientale del Nepal, specialmente del distretto di Khumbu, di origine mongolica, pronti e provati ad ogni fatica, durezza, pericolo o morte. Tra essi è divenuto ormai famoso il loro *sirdar*, o capo, TENZING; il quale da giovine aveva già partecipato alla ricognizione di SHIPTON del 1935, alla spedizione di TUCCI nel Tibet del 1948, ed a quasi tutte le spedizioni ultime dell'*Everest*, compresa quella svizzera del 1952, in cui raggiunse con LAMBERT gli 8600 metri di altezza. Il certificato, rilasciatogli da DITTERT dice, che nessuna sfida era troppo grande per il suo coraggio: *no challenge was too great for his courage.* E così egli divenne, a 39 anni, il *sirdar*, il capo impareggiabile della spedizione HUNT. Egli salvò la vita al gigantesco angloneozelandese HILLARY e con questo, infine, calcò l'inviolata cima dell'*Everest.* Ecco come lo stesso HILLARY, nel libro *The Ascent of Everest*, by John HUNT, London 1953, racconta la fine dell'ascesa suprema: « Eravamo sulla cima. Guardai TENZING e, malgrado il cappuccio, gli occhiali e la maschera per l'ossigeno, tutti incrostati di ghiaccio, che nascondevano la sua faccia, potei discernere l'inconfondibile suo sorriso di pura letizia, come si guardava intorno. Ci demmo la mano, TENZING mi gettò le braccia al collo e ci abbracciammo forte. Erano le 11,30 a. m. Quindi rivolsi lo sguardo alla grande distesa di terra, sotto di noi. Ad oriente sorgeva il fratello gigante *Makalu*, ancora inesplorato ed inaccesso. Assai lontano, attraverso le nubi, si scorgeva all'orizzonte la grande massa del Kancengiunga. Ad occidente il *Cio-Yu*, il nostro vecchio avversario del 1952, dominava la scena, ed oltre di esso potevamo discernere la catena del Nepal prolungarsi in distanza. Mentre io, con le mani intorpidite, cercavo di fare fotografie, TENZING aveva fatto un buco nella neve e vi aveva deposto una tavoletta di cioccolata, un pacchetto di biscotti ed una manciata di caramelle: piccole offerte, invero, ma un dono di devozione alle divinità, che tutti i devoti Buddhisti credono aleggiare su queste alte sommità. Allora io presi un piccolo Crocifisso, che due giorni prima HUNT mi aveva dato, per portarlo sulla vetta, feci un buco nella neve e deposi il Crocifisso accanto ai doni di TENZING ». E così vediamo il Cristiano ed il Buddhista, malgrado le loro diverse fedi, accomunati in pace ed in concordia sulla più alta sommità della terra, quasi a realizzare l'annunzio celeste: *Gloria in excelsis Deo et pax in terra hominibus bonae voluntatis.* Ma TENZING, che aveva tra le sue offerte messo anche la matita blu, affidatagli dalla sua bambina, ricordava in quell'istante il dialogo avuto da lui, nella notte prima della partenza per la spedizione, con sua moglie Ang LHAMU, che lo scongiurava di non partire, temendo, che sarebbe morto sulla *Ciomo-lungma*, ed egli le aveva risposto con le parole, insegnategli dalla dottrina del BUDDHA SAKYAMUNI: « *Tutto ciò che vive deve morire.* Preferiresti vedermi

finire i miei giorni qui, nella mia capanna, piuttosto di sapermi morto lassù, in alto, nel palazzo di neve della dea ? » Questo, TENZING riferì a Yves MALARCTIC, che ha scritto per lui il libro *La conquête de l' Everest par le sherpa Tensing*, Paris, 1954, e gli aggiunse, riferendosi alla sua ascensione all' *Everest* o *Ciomo-lungma*, come egli lo chiamava con l' antico nome tibetano : « Sopra di noi tutte le cime si elevavano maestose e serene come tanti BUDDHA. » Così egli vedeva moltiplicata sulle alte cime nevose dei monti nativi l' immagine del BUDDHA, suo Maestro ; il quale, al pari di lui, e due millenni e mezzo prima di lui, era nato e morto appunto alle pendici del *Himâlaya*.

Ma TENZING non è stato il primo, nè sarà l' ultimo, degli *sherpa* buddhisti del Nepal, a pensare ed agire come lui. Nel mio libro *Il Sole del Gange*, Bologna, Zanichelli, 1925, ho fatto già notare, che nel bel volume *Round Kangchenjunga*, London, 1903, scritto da Douglas W. FRESHFIELD ed illustrato dalle superbe fotografie dell' alto Himâlaya di Vittorio SELLA, a pag. 191 si legge : « Al campo del Letto del Lago, sotto il ghiacciaio, io ero stato assicurato, che l' ultimo ritardatario era giunto. Ora fui informato, che un uomo ancora mancava, e per la prima volta mi si disse, che uno dei portatori Sikkim, un nativo di un villaggio della valle di Tista, il giorno dopo che avevamo attraversato il passo Jonson La, a 20207 piedi, nello scendere l' aspra china rocciosa aveva detto ai suoi compagni, che egli era stanco della sua attuale esistenza, e li pregò di lasciarlo morire. Al che essi prontamente acconsentirono. Il disgraziato diede loro istruzioni, come disporre della sua proprietà, rappresentata dalla vendita d' un piccolo podere. Essi gli lasciarono un po' d' acqua e qualche biscotto, gli coprirono il volto con un panno e continuarono la loro marcia. Dapprima io non credetti al racconto, e, finchè giunsi a Darjiling, sperai sempre di vederlo ricomparire : il che mai avvenne. I compagni dell' uomo sembravano addirittura incapaci di comprendere la mia indignazione per tale abbandono del loro camerata. « Egli desiderava morire ; perchè dovevamo noi opporci al suo desiderio ? » La loro condotta, giudicata secondo il nostro modo di vedere, fu assai strana ; ma io credo, chè essa è caratteristicamente buddhistica ».

Quando io lessi per la prima volta questo episodio, ne ebbi una profonda impressione. Vedevo quell' uomo, disteso sulla costa gelata, a circa settemila metri d' altezza, attendere pacatamente la morte in quella solitudine immensa, illuminata dal bagliore delle nevi perenni, torreggianti intorno fin quasi a novemila metri nel cielo deserto e profondo, e mi sentivo rapito quasi come in un sogno. Pensavo allo sforzo immane, che è costato alla terra la produzione di quella ingente catena di monti : le migliaia di metri di sedimenti, accumulatisi per milioni di anni in fondo al mare, curvate, costrette, spezzate, piegate, raggrinzate, accavallate, fino a superare di novemila metri il mare, da cui emersero ; e sotto di esse, nelle

profonde latebre prodotte da quell' immane corrugamento della crosta terrestre, il fuoco sotterraneo torrefarsi, convellersi, squarciare le pareti rocciose dell' ipogeo ed erompere all' aria tra fulmini e tuoni; e quindi le acque esteriori impadronirsi della nuova grandiosa costruzione, penetrare nelle sue fenditure, circolare nella sua compagine, sgorgare di nuovo allo esterno, correre, dilagare, scrosciare, plasmando e cesellando la nuova architettura; e su essa poi crescere esuberante la vegetazione tropicale, formicolante di una vita animale ricca di innumerevoli forme; e tra queste infine apparire l' uomo, che accoglie nel suo cervello la conscienza di ciò che lo circonda, e serra nel cuore palpitante la stessa inestinguibile sete di vivere, la stessa volontà di divenire, che sollevò il gigantesco *Himâlaya*. Ed ecco, che questa volontà di divenire; la quale ha con così energico sforzo corrugato i monti ad espresso le selve dal seno della terra, questa sete di vita, che fa ardere i fuochi dei vulcani e le fervide brame degli animali e degli uomini, ad un tratto viene ad annientarsi, ad estinguersi nel cuore di quell' umile montanaro himâlayano, che pacatamente si lascia morire di freddo e di fame sulla scena sublime di una delle più grandi convulsioni telluriche. Donde era discesa in quel povero cuore, in quella indotta mente tanta forza, da permetter loro di reclinarsi serenamente in braccio alla morte; al cui solo aspetto noialtri di solito tremiamo, o riusciamo, nel migliore dei casi, a fare il monologo di Amleto? Lo scrittore ed alpinista inglese, Freshfield, l' ha detto: è sicuramente un effetto della dottrina buddhista. E lo stesso ha detto anche lo *sherpa* buddhista Tenzing nel suo dialogo con la moglie e nei suoi colloqui con gli europei. La dottrina di Sakyamuni ha dunque, in senso inverso, una forza eguale a quella, che fu necessaria, per sollevare lo *Himâlaya* e popolarlo d' erbe e d' animali: perchè essa riesce ad estirpare dall' animo umano la sete dell' esistenza ed a renderlo sereno e sorridente durante la vita ed impavido e calmo innanzi alla morte; che invece col suo gelido terrore impietra tutti gli esseri viventi. Questa redenzione dal terrore della morte, liberazione dal dolore, estinzione della sete di vivere, è stata insegnata ed appresa proprio là, dove la vita e la morte, il piacere ed il dolore, simboleggiati nelle divinità brahmaniche e hinduiste della formazione, trasformazione e distruzione dei mondi, si sono affermati nella loro massima potenza. Là, dove la madre terra ha, con sforzi enormi, partorito il titanico *Himâlaya*, rivestendolo delle numerose e portentose forme di vita e di morte, là appunto, proprio alla radice centrale del *Himâlaya*, essa ha dato anche la nascita a quel sublime Svegliato, il Buddha Sakyanumi, che con la sua Dottrina ha fermato, per i suoi seguaci, il giro eterno della vita e della morte.

24 aprile 1954.

Contributo alla teoria generale delle linee d' influenza

Nota del dott. ing. **Vincenzo Franciosi**, *presentata dal socio* **A. Galli**

(Adunanza del dì 15 maggio 1954)

Sunto. – Si propone un procedimento generale per tracciare le linee d' influenza delle sollecitazioni, utilizzando quelle relative alle caratteristiche iperstatiche. Si riportano esempi, con riferimento alla trave continua, all' arco incastrato e alla trave Nielsen.

1. — *Premessa.*

Le linee d' influenza delle caratteristiche della sollecitazione in una struttura iperstatica si ricercano direttamente (prendendo in esame, cioè, per ognuna di esse, la struttura iperstatica soggetta ad una particolare distorsione) solo quando il numero di linee che interessano è limitato. Non appena questo numero supera il grado n di iperstaticità, è opportuno limitarsi al tracciamento diretto delle sole linee d' influenza relative alle n caratteristiche scelte come iperstatiche, e da esse dedurre tutte le altre.

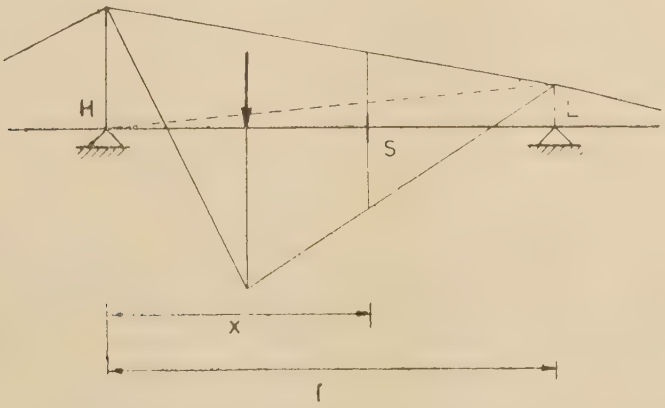


Fig. 1.

E' questo il caso delle strutture da ponte, in cui è sempre necessario uno studio completo degli effetti del carico accidentale, eseguito attraverso il disegno delle linee d' influenza per un numero molto elevato di sezioni.

Si consideri, per esempio, una trave continua. In una sezione S della generica campata HL (fig. 1), il momento è fornito, per una condizione di

carico che impegni la stessa campata, da

$$M_S = M^0_S + \frac{M_H}{l}(l - x) + \frac{M_L}{l} x$$

dove M^0_S è l'ordinata in corrispondenza di S della superficie semplice dei momenti, M_H ed M_L i momenti in H ed L; se il carico non grava su HL è invece

$$M_S = \frac{M_H}{l}(l - x) + \frac{M_L}{l} x.$$

Si deduce che nel tratto HL la linea d'influenza m_S di M_S si ha dalla sovrapposizione della linea d'influenza m^0_S di M_S ottenuta per la trave considerata appoggiata in H ed L, e delle linee m_H ed m_L di M_H ed M_L moltiplicate rispettivamente per $\frac{l-x}{l}$ e per $\frac{x}{l}$; lungo le altre campate la m_S è fornita dalla somma delle ultime due. Poichè la m^0_S è diversa da zero solo su HL, si può scrivere

$$(1) \qquad m_S = m^0_S + m_H \frac{(l - x)}{l} + m_L \frac{x}{l}.$$

Il procedimento è estensibile a qualsiasi tipo di struttura, purchè, fissate le n caratteristiche iperstatiche X_i, si determini attraverso le vie della statica grafica, e relativamente ad ogni sezione S per cui si desidera tracciare la linea d'influenza di una caratteristica C_S, il legame fra questa ultima e le X_i:

$$(2) \qquad C_S = C^0_S + \sum_1^n a_{ci} X_i.$$

E' scopo di questa nota quello di mostrare come ai coefficienti a_{ci} possa essere attribuito un significato fisico di particolare evidenza.

Da questa osservazione si trae, per il tracciamento delle linee d'influenza, un criterio unitario che, trascurando considerazioni di statica necessariamente marginali, deriva direttamente dal principio di reciprocità. Il disegno di qualsiasi linea d'influenza, una volta tracciate quelle relative alle caratteristiche iperstatiche, diviene in questo modo immediato, e l'automaticità del procedimento riduce al minimo le possibilità di errori.

2. — *Esposizione del procedimento.*

Si consideri una struttura monodimensionale piana n volte iperstatica, e siano $X_1\ X_2 \ldots\ldots X_n$ le caratteristiche scelte come iperstatiche. Per ognuna di esse si traccino, con i soliti metodi, le linee d'influenza; precisamente, in corrispondenza della sezione S_i relativa all'incognita X_i, si fa agire la distorsione corrispondente alla X_i (per cui, cioè, compia lavoro, tra le caratteristiche della sollecitazione in S_i, la sola X_i) di valore unitario e di segno negativo. Come è noto, i diagrammi delle componenti verticali ed orizzontali degli spostamenti e quello delle rotazioni forniscono rispettivamente le linee d'influenza della X_i per una forza unitaria orizzontale o verticale, o per una coppia, viaggianti sulla struttura. I diagrammi degli sforzi normali, dei tagli e dei momenti flettenti, cambiati di segno, forniscono invece le linee d'influenza per una distorsione viaggiante di spostamento assiale, di scorrimento o di rotazione relativa.

In possesso delle linee d'influenza relative alle n iperstatiche, si può tracciare per sovrapposizione la linea d'influenza di qualsiasi caratteristica relativa alla generica sezione, e per qualunque ente viaggiante. Si voglia, per esempio, la linea d'influenza c_{se} della caratteristica C relativa alle sezioni S, per l'ente viaggiante E. La costruzione della c_{se} si effettua facendo agire in S la distorsione $\Delta\gamma$ per cui compia lavoro la sola C, di valore unitario (di segno positivo o negativo secondo che l'ente viaggiante E è una distorsione o una forza), e tracciando il diagramma dell'ente E_d duale di E (si intende come ente duale di E quello per cui E compie lavoro; per esempio, se E è una coppia, E_d è una rotazione, se E è una distorsione di allontanamento assiale, E_d è uno sforzo normale).

Per i ben noti teoremi di Scienza delle Costruzioni, l'insieme degli E_d deve soddisfare alle condizioni di equilibrio e di congruenza. La prima condizione impone che gli sforzi interni connessi con gli E_d siano in equilibrio con un sistema di forze applicate nulle, e cioè che possano farsi derivare da un sistema di reazioni vincolari esterne tra loro in equilibrio. La seconda condizione richiede che le deformazioni connesse con gli E_d siano tali da rispettare la compagine della struttura ed i suoi vincoli esterni, e diano luogo in S alla desiderata distorsione $\Delta\gamma$. In omaggio al principio di Kirchoff si può asserire che, se un insieme di E_d soddisfa alle condizioni suddette, esso è l'unica soluzione del problema. Si operi perciò come segue. Si renda la struttura isostatica annullando le iperstatiche X_i (struttura principale); con riferimento ad essa si tracci la linea d'influenza c^0_{se} della caratteristica C in S. Tale linea, che può chiamarsi « linea d'influenza principale », si ottiene con i ben noti metodi che la statica grafica propone per le deformazioni rigide, assegnando la distorsione $\Delta\gamma$ in S alla struttura isostatica. La c^0_{se} soddisfa le condizioni di equilibrio, poichè è

ottenuta senza l'intervento di forze applicate; le condizioni di congruenza sono soddisfatte in S, poichè ivi si verifica la distorsione $\Delta\gamma$, ma non nelle sezioni S_i corrispondenti alle X_i. Infatti, in genere accade che, imprimendo la $\Delta\gamma$ nella sezione S della struttura principale, si destino degli spostamenti relativi $\Delta\xi_i$ in corrispondenza di tutte o di alcune delle sezioni S_i. Il rispetto delle condizioni di congruenza nelle sezioni S_i si può ripristinare imponendo, in corrispondenza di ciascuna di esse, e sulla struttura effettiva, distorsioni pari a $-\Delta\xi_i$. Poichè le distorsioni generano un sistema di sforzi interni in equilibrio con forze applicate nulle, le condizioni di equilibrio sono rispettate. L'insieme di E_d, somma degli E^0_d generati dalla distorsione $\Delta\gamma$ sulla struttura isostatica, e degli E^i_d generati dalle $\Delta\xi_i$ sulla struttura iperstatica,

$$E_d = E^0_d + E^1_d + E^2_d + \ldots + E^n_d$$

soddisfa le condizioni di equilibrio e di congruenza, e quindi è la linea d'influenza richiesta.

Il tracciamento della generica linea correttiva E^i_d è immediato; infatti, poichè essa deriva dalla distorsione $-\Delta\xi_i$ in S_i, è fornita dalla linea d'influenza della X_i per effetto dell'ente E viaggiante, moltiplicata per $\Delta\xi_i$, e col suo segno o col segno cambiato secondo che E è una forza o una distorsione.

3. — *La trave continua.*

Si consideri la trave continua della figura 2*a*, solidale con i ritti, con sezioni comunque variabili; siano già tracciate le linee d'influenza del momento in corrispondenza delle sezioni B′ B″ della trave, immediatamente a sinistra e a destra del nodo B, delle sezioni C′ e C″ a sinistra e a destra di C, delle sezioni E ed F dei ritti. Si ricorda che queste linee possono ottenersi, ove siano stati preventivamente determinati i punti fissi e i relativi coefficienti di ripartizione (ricerca necessaria [4] se si vogliono ottenere in prima approssimazione i diagrammi dei massimi e minimi momenti col procedimento di Guidi-Albenga), applicando sulle due facce risultanti da un taglio in corrispondenza della sezione in esame (ad es. B″) due coppie pari a [1]

$$M = \frac{1}{\gamma^B_{AE} + \gamma^B_Q}$$

e diffondendole attraverso i punti fissi. Il diagramma dei momenti così ottenuto è la linea $m_{B''\mu}$ (il segno è quello per cui la distorsione in B″ ri-

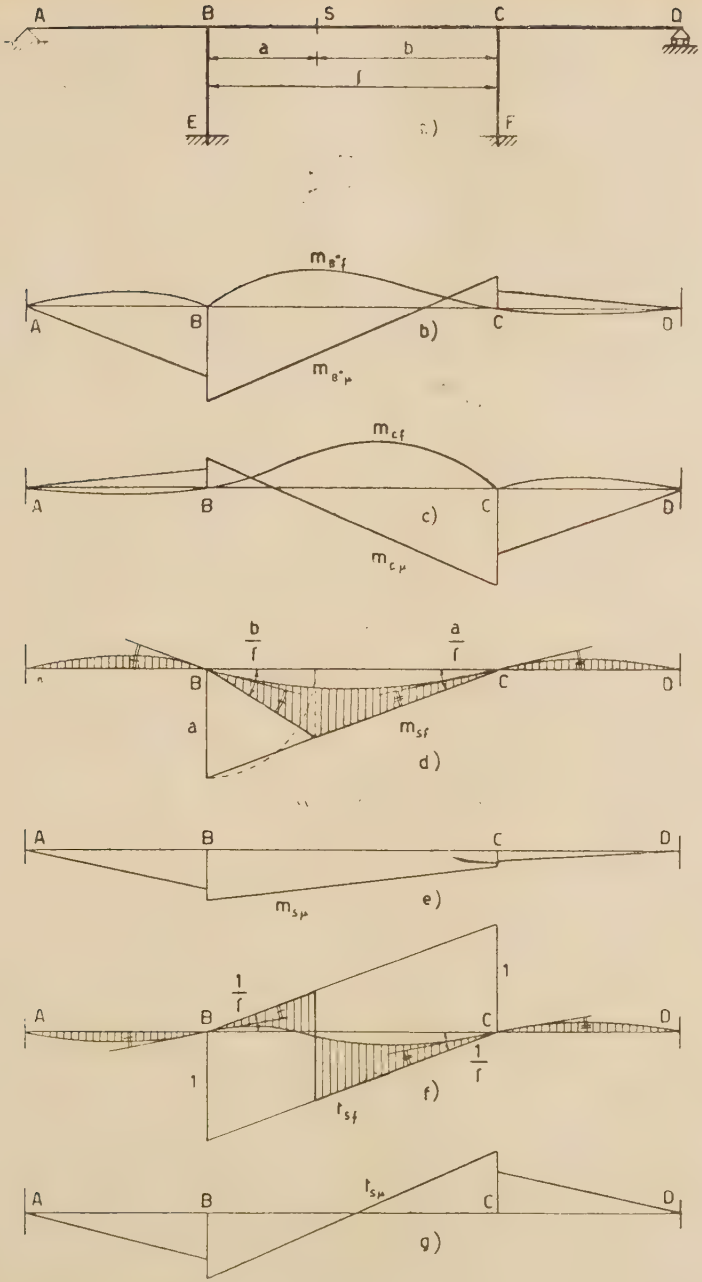

A
B
S
C
D
a
b
l
E
F
a)
m_{Bf}
b)
$m_{B\mu}$
m_{Cf}
c)
$m_{C\mu}$
$\frac{b}{l}$
$\frac{a}{l}$
a
m_{sf}
d)
$m_{s\mu}$
e)
$\frac{1}{l}$
1
f)
r_{sf}
$r_{s\mu}$
g)

Fig. 2.

sulta positiva); la deformata connessa con i momenti $-m_{B''\mu}$, ricavabile utilizzando formulari [2] è la linea $m_{B''f}$. Recentissimo è il metodo proposto dall'ing. RAITHEL [3]: si imprime la distorsione unitaria in B'' supponendo impedita la rotazione dei nodi B e C, e i momenti di incastro perfetto così ottenuti in B e C, si diffondono secondo CROSS. Si perviene così alla linea $m_{B''\mu}$, e da questa, come prima, alla linea $m_{B''f}$. Anche recente è il procedimento dei bilanciamenti angolari, dovuto al GRINTER ed esteso dal MICHALOS alle travi a sezione variabile [4]; in esso si bilanciano le discontinuità angolari invece dei momenti squilibrati. Dei due ultimi procedimenti è preferibile quello del Raithel quando si posseggono formulari che forniscono le deformate di una trave a due appoggi soggetta ad una coppia unitaria in un estremo, e quello del Grinter invece quando i formulari forniscono le deformate di una trave a due incastri soggetta ad una distorsione unitaria in corrispondenza di un incastro.

La trave diviene isostatica ove, in corrispondenza delle sezioni B' B'' C' C'' EF, si pongano delle cerniere; si assume questa come struttura principale. Per ottenere la linea d'influenza m_{Sf} del momento in S, sezione generica della campata BC, per effetto di una forza verticale viaggiante, si comincia a tracciare quella m^0_{Sf} relativa alla struttura principale (fig. 2*d*) Per il rispetto della congruenza occorre poi annullare le rotazioni relative $\frac{b}{l}$ e $\frac{a}{l}$ in B'' e C'; è cioè necessario imprimere alla struttura effettiva le distorsioni $-b/l$ e $-a/l$ in B'' e C', sommare alla linea m^0_{Sf} gli spostamenti provocati da queste distorsioni. Poichè il diagramma degli spostamenti provocati da una distorsione $\Delta\alpha = -1$ in B'' è la linea d'influenza $m_{B''f}$ del momento in B'' per una forza verticale viaggiante (fig. 2*b*), e analogamente può dirsi per C', si può scrivere

$$m_{Sf} = m^0_{Sf} + \frac{b}{l} m_{B''f} + \frac{a}{l} m_{C'f}. \tag{3}$$

In maniera del tutto analoga, per la linea d'influenza del taglio in S (fig. 2*f*) si ha

$$t_{Sf} = t^0_{Sf} - \frac{1}{l} m_{B''f} + \frac{1}{l} m_{C'f}. \tag{4}$$

Si passi adesso al tracciamento della linea d'influenza $m_{S\mu}$ (fig. 2*e*) del momento in S per una distorsione di rotazione relativa viaggiante; essa è fornita dal diagramma dei momenti flettenti provocati da una distorsione $\Delta\alpha = +1$ in S. Si imprime la distorsione in S sulla struttura isostatica: in questa fase nessun momento si genera lungo la struttura, quindi $m^0_{S\mu} = 0$. Occorre poi annullare le rotazioni relative $-b/l$ in B'' e $-a/l$

in C′, e cioè imprimere le distorsioni $+ b/l$ in B″ e $+ a/l$ in C′, e tracciare il diagramma di momenti che ne deriva: questo coincide con la linea $m_{S\mu}$. Poichè il diagramma dei momenti generati dalla distorsione $\Delta\alpha = + 1$ in B″ è la linea d'influenza $m_{B''\mu}$ del momento in B″ per una distorsione viaggiante di rotazione relativa, e analogamente può dirsi per C′, si ha

$$m_{S\mu} = \frac{b}{l} m_{B''\mu} + \frac{a}{l} m_{C'\mu}. \tag{5}$$

La linea d'influenza $t_{S\mu}$ del taglio in S per una distorsione viaggiante di rotazione relativa è fornita dal diagramma del momento flettente provocato da una distorsione di scorrimento relativo $\Delta v = + 1$ in S. Con ra-

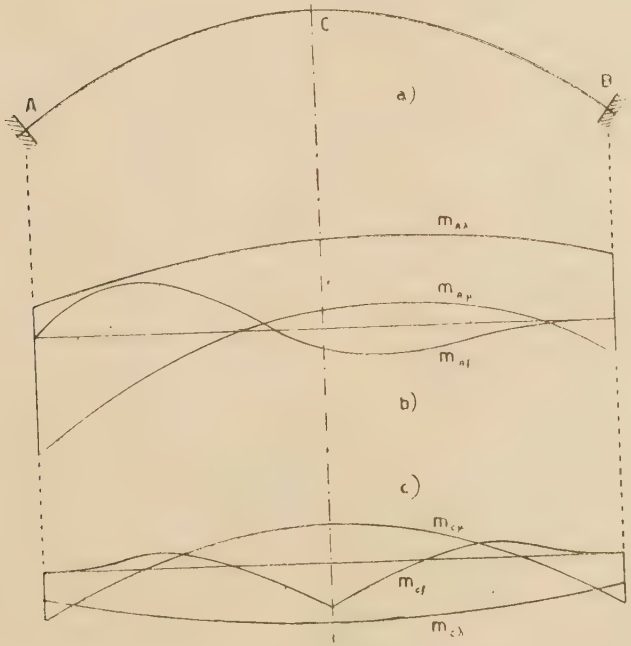


Fig. 3.

gionamento del tutto analogo a quello svolto precedentemente risulta $t^0_{S\mu} = 0$, e

$$t_{S\mu} = - \frac{1}{l} m_{B''\mu} + \frac{1}{l} m_{C'\mu}. \tag{6}$$

4. — *L'arco incastrato.*

Si consideri un arco incastrato, con imposte a livello, simmetrico rispetto alla mezzeria. Siano tracciate (fig. 3) le linee d'influenza del momento nelle sezioni A e B di imposta e C di chiave, per forze verticali e per distorsioni del tipo rotazione $\Delta\alpha$ e allontanamento assiale Δu relativi. Per ottenere la linea d'influenza m_{sf} del momento in una generica sezione S, per una forza verticale viaggiante, si tracci anzitutto la linea $m^0{}_{sf}$ (fig. 4)

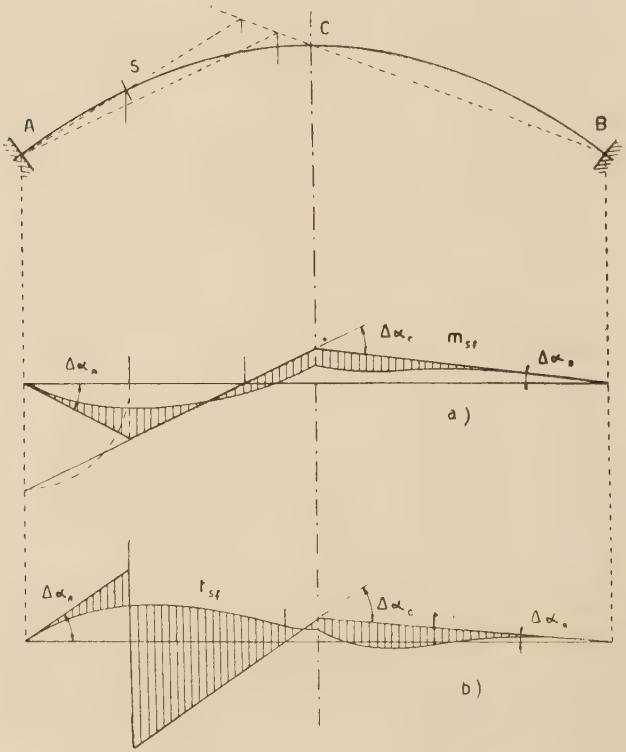


Fig. 4.

relativa alla struttura resa isostatica con tre cerniere in A,B e C; essa si ottiene attraverso il noto procedimento delle catene cinematiche [1]). E' ne-

[1]) Cade qui opportuna l'osservazione che la scelta come incognite iperstatiche delle componenti di una reazione d'incastro R_A riferite al baricentro elastico G, mentre è conveniente per la ricerca analitica delle reazioni dovute ad una condizione di carico fisso (come è noto, si ottengono così tre equazioni contenenti ognuna una sola incognita) non è più consigliabile quando si passi allo studio degli effetti dei carichi mobili, e duindi al tracciamento delle linee d'in-

cessario poi, per il rispetto della congruenza, imprimere le distorsioni $-\Delta\alpha_A$, $-\Delta\alpha_C$ e $+\Delta\alpha_B$ in A,C e B [2]) e sommare al diagramma $m^0{}_{Sf}$ gli abbassamenti che ne derivano. Si ha così

$$(7) \qquad m_{Sf} = m^0{}_{Sf} + \Delta\alpha_A\, m_{Af} - \Delta\alpha_B\, m_{Bf} + \Delta\alpha_C\, m_{Cf}.$$

In maniera del tutto analoga, per le linee d'influenza $m_{S\mu}$ ed $m_{S\lambda}$ del momento in S per una distorsione $\Delta\alpha = +1$ o $\Delta u = +1$ viaggianti si ha

$$(8) \qquad \begin{aligned} m_{S\mu} &= \Delta\alpha_A\, m_{A\mu} - \Delta\alpha_B\, m_{B\mu} + \Delta\alpha_C\, m_{C\mu} \\ m_{S\lambda} &= \Delta\alpha_A\, m_{A\lambda} - \Delta\alpha_B\, m_{B\lambda} + \Delta\alpha_C\, m_{C\lambda}. \end{aligned}$$

Per le linee d'influenza del taglio in S si ha invece (fig. 5*b*)

$$(9) \qquad \begin{aligned} t_{Sf} &= t^0{}_{Sf} - \Delta\alpha_A\, m_{Af} + \Delta\alpha_B\, m_{Bf} + \Delta\alpha_C\, m_{Cf} \\ t_{S\mu} &= -\Delta\alpha_A\, m_{A\mu} + \Delta\alpha_B\, m_{B\mu} + \Delta\alpha_C\, m_{C\mu} \\ t_{S\lambda} &= -\Delta\alpha_A\, m_{A\lambda} + \Delta\alpha_B\, m_{B\lambda} + \Delta\alpha_C\, m_{C\lambda}; \end{aligned}$$

in questo caso le ampiezze degli angoli $\Delta\alpha_A, \Delta\alpha_B, \Delta\alpha_C$ si leggono sulla linea $t^0{}_{Sf}$.

5. — *La trave Nielsen.*

Come ultimo esempio si consideri una trave Nielsen. Si assumono come incognite i momenti in corrispondenza dei punti di concorso delle aste della sospensione sull'arco e sulla catena; la struttura isostatica è così la travatura reticolare a nodi cerniera. Si ricavano anzitutto le linee d'influenza dei momenti nei nodi per una forza verticale unitaria che viaggi sulla catena (è questo in pratica l'unico ente viaggiante che interessi); è utile avvertire che queste linee sono delle poligonali con i vertici in corrispondenza delle verticali per i nodi della catena, poichè di norma si fa l'ipotesi del carico indiretto. Si passi poi al tracciamento delle altre linee d'influenza: particolarmente importanti sono quelle degli sforzi nelle aste della sospensione, sia per il loro proporzionamento, sia, e soprattutto, per conoscere le sollecitazioni nelle strutture variate. Si debba, per esem-

---

fluenza. Infatti le linee d'influenza dei momenti in A,B e C hanno un evidente significato fisico, che manca alla linea del momento della R_A rispetto a G; inoltre, per archi simmetrici, le linee d'influenza di M_A sono simmetriche rispetto a quelle di M_B.

[2]) Questi angoli si misurano sulla linea $m^0{}_{Sf}$ confondendoli al solito con le tangenti. Per i segni valgono le note regole per cui una distorsione è positiva quando la corrispondente caratteristica positiva dello sforzo compie per essa lavoro positivo.

pio, ottenere (fig. 5) la linea d'influenza h_4 dello sforzo nell'asta 4 (DE). Si traccia prima la linea h^0_4 relativa alla struttura isostatica: le discontinuità si verificano solo in corrispondenza delle quattro cerniere C D E F; i valori $\Delta\alpha_E$ e $\Delta\alpha_F$ si misurano (confondendo, al solito, gli angoli con le

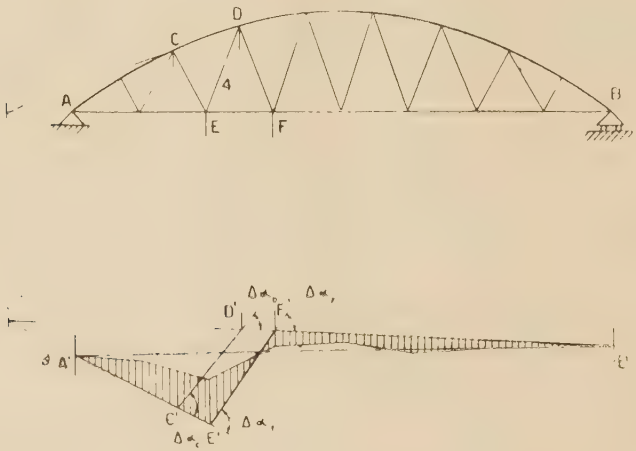


Fig. 5.

tangenti) sulla deformata A' E' F' B' del corrente inferiore; i valori di $\Delta\alpha_C$ e $\Delta\alpha_D$ si misurano invece sulla deformata A' C' D' B' del corrente superiore. Occorre poi ricondurre la struttura al rispetto della congruenza in C D E F, e cioè imprimere alla struttura effettiva le distorsioni $+\Delta\alpha_C$, $-\Delta\alpha_D$, $+\Delta\alpha_E$, $-\Delta\alpha_F$; il diagramma delle componenti verticali degli spostamenti del corrente inferiore che derivano da queste distorsioni deve essere sommato alla h^0_4 per ottenere la h_4. Con i simboli noti si può scrivere

$$(10) \qquad h_4 = h^0_4 - \Delta\alpha_C\, m_C + \Delta\alpha_D\, m_D - \Delta\alpha_E\, m_E + \Delta\alpha_F\, m_F .$$

Anche la h_4 è una poligonale con i vertici in corrispondenza delle verticali per i nodi della catena.

BIBLIOGRAFIA

1. A. Galli — *Scienza delle Costruzioni,* Vol. II. Ed. Pellerano-Del Gaudio, Napoli, 1953.
2. F. Schleicher — *Taschenbuch für Bauingenieure.* Ed. Springer. Berlino, 1949.
3. A. Raithel — *Sulla determinazione delle linee d'influenza nei sistemi ad alto grado di iperstaticità.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, 1951.
4. V. Franciosi — *Lezioni di ponti.* Ed. Pellerano e Del Gaudio. Napoli, 1953.

Napoli, Istituto di Scienza delle costruzioni, Marzo 1954.

Su alcune varietà dell'S_{23} complesso determinate dall'algebra dei numeri quadriduali come sottoalgebra dei numeri triplo-biduali

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 15 maggio 1954)

Sunto. — Assegnato un modello proiettivo dell'ente algebrico ∞^2 con una superficie algebrica irriducibile dell'S_3 complesso, si costruisce un nuovo modello proiettivo di tale ente algebrico con una varietà V_{13} dell'S_{23} costituita da ∞^2 S_{11} generatori. Di tale varietà ci siamo serviti, senza indicarne la provenienza (trattata ora in questa nota) per la determinazione di una trasformazione birazionale atta a sciogliere le singolarità della data superficie algebrica [1]). Detta V_{13} costituisce la I^a rappresentazione complessa del prolungamento quadriduale della superficie algebrica complessa data, considerando l'algebra del quarto ordine dei numeri quadriduali come sottoalgebra dell'algebra del sesto ordine dei numeri triplo-biduali.

Questa nota fa seguito ad un'altra (pubblicata in questo volume del Rend. dell'Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli), dove è trattata l'analoga questione relativamente all'ente algebrico ∞^1.

In questa nota è studiata pure la trasformazione T dell'S_{23} che si ottiene con la rappresentazione della trasformazione prolungamento nel campo quadriduale di una trasformazione birazionale assegnata nell'S_3 complesso, e il comportamento della T in relazione con gli S_{11} generatori della V_{13} e della V_{16} in cui varia la V_{13} al variare della superficie data nell'S_3 complesso.

Nella V_{13} si studiano pure le falde rispondenti ai rami e alle falde della superficie data in S_3.

Si studia, infine, la V_{16} dell'S_{23} riempita da tutte le V_{13} rispondenti alle superficie di S_3, varietà che risulta costituita da ∞^5 S_{11} generatori in corrispondenza biunivoca con le coppie punto-piano appartenentisi dell'S_3 complesso.

---

[1]) N. Spampinato. *Trasformazione birazionale determinata da una ipersuperficie dell'* S_r *complesso per lo scioglimento delle sue singolarità.*

N. Spampinato. *Effettiva determinazione di una trasformazione birazionale trasformante una data ipersuperficie dell'* S_r *complesso in una varietà della* $S_{r2^{r-1}}$ *priva di punti multipli.* Giornale di Matematiche di Battaglini. Vol. LXXXI, fasc. II.

1. *L'algebra dei numeri quadriduali come sottoalgebra dell'algebra del 6° ordine dei numeri triplo-biduali.*

Nell'algebra dei numeri triplo-biduali (somma diretta di tre algebre equivalenti all'algebra dei numeri biduali) con le unità $u_1, u_2, \ldots, u_6$ e la tabella di moltiplicazione

(1)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	u_1	u_2	0	0	0	0
u_2	u_2	0	0	0	0	0
u_3	0	0	u_3	u_4	0	0
u_4	0	0	u_4	0	0	0
u_5	0	0	0	0	u_5	u_6
u_6	0	0	0	0	u_6	0

ed il modulo

$$u = u_1 + u_3 + u_5, \tag{2}$$

consideriamo il sistema determinato dal modulo u e dalle tre unità di indice pari u_2, u_4, u_6, costituito dai numeri

$$\mu = xu + yu_2 + zu_4 + tu_6 \tag{3}$$

Tale sistema costituisce un'algebra del quarto ordine, perchè il prodotto di due elementi del tipo (3), tenendo conto della tabella (1), è un elemento dello stesso sistema. Assumendo in questa sottoalgebra del 4° ordine come unità u, u_2, u_4, u_6, si ha la tabella di moltiplicazione

(4)

	u	u_2	u_4	u_6
u	u	u_2	u_4	u_6
u_2	u_2	0	0	0
u_4	u_4	0	0	0
u_6	u_6	0	0	0

come si verifica tenendo conto della tabella (1) e della posizione (2). Ora la (4) non è altro che la tabella di moltiplicazione dei *numeri quadriduali.* Si ha perciò:

I) *L'algebra dei numeri triplo-biduali contiene una sottoalgebra equivalente all'algebra dei numeri quadriduali. Essa è determinata dal modulo u e dalle* u_2, u_4, u_6, *che assunte come unità si moltiplicano con la tabella* (4).

Si noti che un elemento dell'algebra nei numeri triplo-biduali

$$\eta = x_1 u_1 + \ldots + x_6 u_6 \tag{5}$$

risulta appartenente alla sottoalgebra di tabella (4), cioè un elemento del tipo (3) quando e solo quando è $x_1 = x_3 = x_5$. Posto in tal caso $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_4 = z$, $x_6 = t$ la (5) ci dà l'elemento μ dato dalla (3). Sicchè:

II) *I numeri triplo-biduali* η *dati dalla* (5) *che costituiscono la sottoalgebra equivalente all'algebra dei numeri quadriduali sono quelli che hanno eguali le coordinate di indice dispari.*

Si noti che gli elementi del tipo $x_1 u_1 + x_2 u_2$, $x_3 u_3 + x_4 u_4$, $x_5 u_5 + x_6 u_6$ costituiscono, rispettivamente, un'algebra del secondo ordine equivalente a quella dei numeri biduali, perchè, anche per es. le unità u_1 ed u_2 si moltiplicano fra di loro con la tabella

(6)

	u_1	u_2
u_1	u_1	u_2
u_2	u_2	0

Moltiplicate con qualunque altra unità danno per prodotto zero.

Ciò dimostra che l'algebra con la tabella (1) è somma diretta di tre algebra equivalenti all'algebra dei numeri biduali di tabella (6).

Per mettere i numeri triplo-biduali sotto forma di matrici quadrate di ordine 6, basta moltiplicare un dato elemento (5) per ciascuna unità $u_1, \ldots, u_6$ e considerare la matrice dei coefficienti dei sei prodotti ηu_j. Si ha la matrice

$$(7) \qquad X = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 \end{Vmatrix}$$

Per $x_1 = x_3 = x_5 = x$, $x_2 = y$, $x_4 = z$, $x_6 = t$ si hanno le matrici del tipo

$$(8) \qquad M = \begin{Vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{Vmatrix}$$

Si ha perciò:

III) *Considerando i numeri triplo-biduali sotto forma di matrici* (7) *la sottoalgebra dei numeri quadriduali risulta costituita dalle matrici del tipo* (8).

2. *La congruenza* (S_5) *dell'* S_{23} *complesso costituente la* I^a *rappresentazione complessa dell'* S_3 *triplo-biduale.*

Nell'S_3 triplo-biduale consideriamo un punto di coordinate triplo-biduali (X , Y , Z , T), con la quaterna (X , Y , Z , T) di caratteristica massima, cioè 6, e definita a meno di un fattore triplo-biduale non nullo nè divisore dello zero cioè rappresentato da una matrice a determinante non nullo. Posto

$$(9) \qquad X = \Sigma\, x_j\, u_j,\ Y = \Sigma\, y_j\, u_j,\ Z = \Sigma\, z_j\, u_j,\ T = \Sigma\, t_j\, u_j$$

deve essere di caratteristica massimo la matrice

$$(10) \qquad \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & t_1 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t_3 & t_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & t_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & x_6 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t_5 & t_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_5 \end{Vmatrix}$$

Nell'S_{23} proiettivo complesso i sei punti aventi per coordinate le sei righe della matrice (10) sisultano indipendenti e quindi determinano un S_5 che si dìce immagine, nella I^a rappresentazione del punto triplo-biduale (X, Y, Z, T) dato, in quanto che alla terna (KX, KY, KZ, KT) con K triplo-biduale non nullo nè divisore dello zero, risponde lo stesso S_5.

Variando il punto (X, Y, Z, T) nell'S_3 triplo-biduale, l'S_5 immagine nell'S_{23} descrive una congruenza (S_5) che dà la I^a rappresentazione complessa dell'S_3 triplo biduale.

Indicando con $A_1, A_2, \ldots, A_{24}$ i punti fondamentali del sistema di coordinate di S_{23} ed indicando con η_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) lo spazio congiungente i quattro punti A_j, A_{j+6}, A_{j+12}, A_{j+18}, si scorge che:

a) i punti P_2, P_4, P_6 aventi per coordinate la 2^a, 4^a e 6^a riga della matrice (10) variano, rispettivamente nei tre spazi η_2, η_4 ed η_6.

b) I punti P_1, P_3 e P_5 variano, rispettivamente, nei tre S_7 congiungenti le tre coppie di spazi (η_1, η_2), (η_3, η_4), (η_5, η_6) con le condizioni che le coordinate di posto dispari devono risultare proporzionali alle coordinate di posto pari dei tre punti P_2, P_4, P_6, rispettivamente, supposti già fissati in η_2, η_4 ed η_6 per la proprietà *a*).

Si noti che le rette $P_1 P_2$ dentro l'$S_7 = \eta_1 \eta_2$ descrivono la congruenza che dà la prima rappresentazione dell'S_3 biduale, dato che in tale S_7 le coordinate di P_1 e P_2 sono le due righe della matrice

$$(11) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & z_1 & z_2 & t_1 & t_2 \\ 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 & z_1 & 0 & t_1 \end{matrix} \right\|$$

composta con quattro numeri biduali messi sotto forma di matrici quadrate del secondo ordine.

Analogamente si scorge che le rette P_3 P_4 dentro l'$S_7 = \eta_3 \eta_4$, e le rette $P_5 P_6$ dentro l'$S_7 = \eta_5 \eta_6$, descrivono pure un'analoga congruenza di rette immagine di un S_3 biduale. Ciò dipende dalla proprietà dell'algebra dei numeri triplo-biduale di essere somma diretta di tre algebre equivalenti all'algebra dei numeri biduali. Ne segue che:

I) *Gli* S_5 *della congruenza* (S_5) *che dà in* S_{23} *la* I^a *rappresentazione dell'*S_3 *triplo-biduale si ottengono congiungendo le terne di rette* $P_1 P_2$, $P_3 P_4$, $P_5 P_6$ *di tre congruenze* S_7 $\eta_1 \eta_2$, $\eta_3 \eta_4$, $\eta_5 \eta_6$ *che dànno, ciascuna, la rappresentazione dell'*S_3 *biduale.*

Si noti che, per es., le rette della sudetta congruenza dell'$S_7 = \eta_1 \eta_2$ sono ∞^6 ed appoggiate all'S_3 η_2, e quelle uscenti da un punto P_2 di η_2 costituiscono una stella di ∞^4 rette dentro un S_4 passante per lo spazio

η_2 e corrispondente a P_2 in una proiettività fra questo spazio η_2 e la stella di S_4 in S_7 avente per vertice tale spazio η_2.

Gli S_5 della congruenza (S_5) sono ∞^{18}, rispondente alle terne di rette di dette tre congruenze, e sono le immagini dei punti dell'S_3 triplo-biduale che ha la dimensione complessa 18 (essendo di ordine 6 l'algebra dei numeri triplo-biduale).

Fissati P_2, P_4, P_6 in η_2, η_4, η_6 restano, pertanto, fissati tre S_4 rispettivamente passanti per η_2, η_4 e η_6, dove variano le rette $P_1 P_2$, $P_3 P_4$ e $P_5 P_6$. Tali tre S_4 sono congiunti da un S_{14} passante per l'$S_{11} = \eta_2 \eta_4 \eta_6$, e questo S_{14} sarà riempito dagli ∞^9 S_5 di (S_5) passanti per i tre punti fissati P_2, P_4 e P_6. Dunque

II) *Gli* ∞^{18} S_5 *della congruenza* (S_5) *dell'*S_{23} *sono distribuiti, ad* ∞^9 ∞^9, *in* ∞^9 S_{14} *passanti per l'*$S_{11} = \eta_2 \eta_4 \eta_6$.

3. *Gli* ∞^{12} S_5 *della congruenza* (S_5), *immagine dell'*S_3 *triplo-biduale, rappresentanti i punti del piano quadriduale.*

Nel n^0 1 abbiamo osservato che l'algebra dei numeri triplo-biduali contiene una sottoalgebra equivalente all'algebra dei numeri quadriduali. Ne segue che dentro l'S_3 triplo-biduale c'è luogo a considerare l'S_3 quadriduale. Precisamente un punto (X, Y, Z, T) dell'S_3 triplo-biduale lo diremo quadriduale quando le sue coordinate sono numeri quadriduali, cioè, messi sottoforma di matrici del tipo (7), risultano, in particolare del tipo (8). In tal caso la matrice (10) avrà gli elementi soddisfacenti alle condizioni

$$(12) \qquad x_1 = x_3 = x_5 \ , \ y_1 = y_3 = y_5 \ , \ z_1 = z_3 = z_5 \ , \ t_1 = t_3 = t_5$$

Ne segue che i tre punti P_2, P_4, e P_6 aventi per coordinate la 2ª, 4ª e 6ª riga della matrice (10), si corrispondono nelle proiettività, fra i tre spazi η_2, η_4 ed η_6, di equazioni (12), in cui, cioè, punti corrispondenti hanno eguali coordinate. Si ha perciò

I) *Gli* S_5 *della congruenza* (S_5) *che rappresentano i punti dell'*S_3 *quadriduale contenuto nell'*S_3 *triplo-duale, sono quelli i cui punti di appoggio* P_2, P_4, P_6, *nei tre spazi* η_2, η_4 *ed* η_6, *si corrispondono nelle proiettività fra detti spazi, di equazioni* (12).

Tenendo allora conto della proprietà II) del n^0 precedente si ha che:

II) *Gli* ∞^{12} S_5 *che rappresentano in* S_{23} *i punti dello spazio quadriduale si distribuiscono, ad* ∞^9 ∞^9, *in* ∞^3 S_{14} *passanti per l'*$S_{11} = \eta_2 \eta_4 \eta_6$.

4. *Prolungamento di una superficie algebrica dell'* S_3 *complesso nell'* S_3 *quadriduale e sua rappresentaztone nell'* S_{23} *ambiente della congruenza* (S_5).

Nello spazio complesso consideriamo una superficie algebrica irriducibile σ^n di ordine $n>1$, di equazione

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{13}$$

Sostituendo nella forma $f(x, y, z, t)$ alle variabili complesse x, y, z, t le variabili triplo-biduali X, Y, Z, T, si ha l'equazione

$$f(X, Y, Z, T) = 0 \tag{14}$$

che rappresenta nell'S_3 triplo-biduale la superficie prolungamento di σ^n in detto spazio, superficie che sarà rappresentata nell'S_{23} dalla varietà, composta con la congruenza (S_5) che rappresenta l'S_3 triplo-biduale, avente per equazioni le sei equazioni alle quali è equivalente la (14), e che si ottengono sostituendo alle quattro variabili triplo-biduali le loro espressioni come combinazioni delle sei unità $u_1, \ldots, u_6$, eseguendo i calcoli tenendo conto della tabella di moltiplicazione (1), ed eguagliando a zero le forme complesse che risultano a coefficienti di dette unità. Si ottiene così il sistema

$$\left\{\begin{array}{l} f(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} x_2 + \dfrac{\partial f}{\partial y_1} y_2 + \dfrac{\partial f}{\partial z_1} z_2 + \dfrac{\partial f}{\partial t_1} t_2 = 0 \\ f(x_3, y_3, z_3, t_3) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} x_4 + \dfrac{\partial f}{\partial y_3} y_4 + \dfrac{\partial f}{\partial z_3} z_4 + \dfrac{\partial f}{\partial t_3} t_4 = 0 \\ f(x_5, y_5, z_5, t_5) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_5} x_6 + \dfrac{\partial f}{\partial y_5} y_6 + \dfrac{\partial f}{\partial z_5} z_6 + \dfrac{\partial f}{\partial t_5} t_6 = 0 \end{array}\right. \tag{15}$$

Volendo prolungare la superficie complessa σ^n nello spazio quadriduale, servendoci dell'algebra dei numeri quadriduali come sottoalgebra dei numeri triplo-biduali, basta imporre la condizione che le variabili X, Y, Z, T, variino, in particolare, nella sottoalgebra quadriduale, cioè bisogna imporre le condizioni

$$x_1 = x_3 = x_5\ ,\quad y_1 = y_3 = y_5\ ,\quad z_1 = z_3 = z_5\ ,\quad t_1 = t_3 = t_5 \tag{16}$$

da aggregare alle (15), e così degli S_5 della congruenza (S_5) che compon-

gono la varietà di equazioni (15), si verranno a considerare solo quelli che rappresentano punti quadriduali, e costituiranno la varietà che rappresenterà nell'S_{23} la superficie dello spazio quadriduale prolungamento della superficie σ'' assegnata nello spazio complesso. Si ha perciò:

I) *La superficie, dello spazio complesso, di equazione* (13), *prolungate nell'*S_3 *quadriduale, dà una superficie i cui punti quadriduali sono rappresentati dagli* S_5 *della congruenza* (S_5) *dell'*S_{23}, *costituenti la varietà di equazioni* (15) *e* (16).

Si osservi intanto che se un punto

$$Q\,(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_6\,,\,y_1\,,\,\ldots\,,\,y_6\,,\,z_1\,,\,\ldots\,,\,z_6\,,\,t_1\,,\,\ldots\,,\,t_6)$$

dell'S_{23} soddisfa con le sue coordinate alle (15) e (16), detti $Q_1\,,\,Q_2\,,\,\ldots\,,\,Q_6$ i sei punti proiezioni di Q in ciascuno dei sei spazi $\eta_1\,,\,\eta_2\,,\,\ldots\,,\,\eta_6$, dallo spazio opposto congiungente i rimanenti cinque spazi η_j [il punto Q_j si ottiene da Q annullando in questo tutte le coordinate x_s, y_s, z_s, t_s con $s \neq j$] risulta che:

a) I punti $Q_1\,(x_1,\,y_1,\,z_1,\,t_1)$, $Q_3\,(x_3,\,y_3,\,z_3,\,t_3)$, *e* $Q_5\,(x_5,\,y_5,\,z_5,\,t_5)$ *degli spazi* η_1, η_3, η_5, *si corrispondono nelle proiettività, fra questi spazi, di equazioni* (16).

b) Tali punti Q_1, Q_3, Q_5 *appartengono alle tre superficie di* η_1,η_3,η_5 *di equazioni prima, terza e quinta del sistema* (15), *e quindi proiettive fra di loro e alla data superficie* σ'', *dello spazio complesso.* Diciamo σ_1, σ_3, σ_5 dette superficie.

c) I punti Q_2, Q_4 *e* Q_6, *supposti fissati* Q_1, Q_3 *e* Q_5 *soddisfacenti alle condizioni a) e b), appartengono ai tre piani di* η_2, η_4 *ed* η_6 *di equazioni seconda, quarta e sesta del sistema* (15), *tangenti alle superficie* σ_2, σ_4 *e* σ_6, *proiettive fra di loro e alla* σ'', *nelle proiettività di equazioni*

$$(17)\quad x = x_j\,,\quad y = y_j\,,\quad z = z_j\,,\quad t = t_j \qquad (j = 1\,,2\,,\ldots\,,6)$$

con i punti di contatto nei tre punti omologhi di Q_1, Q_3 *e* Q_6 *in dette proiettività.* Diciamo π_2, π_4 e π_6 tali tre piani.

d) Quando le proprietà a), b) e c) sono soddisfatte l'S_{11} *congiungente i punti* Q_1, Q_3, Q_5 *ed i piani* π_2, π_4 *e* π_6 *appartiene alla varietà di equazioni* (15) e (16). Di tali S_{11} se ne ha uno per ogni punto semplice di σ'', ovvero per ogni punto semplice Q_1 di σ_1. Si avranno così ∞^2 S_{11} generatori della varietà, rispondenti agli ∞^2 punti semplici di σ'' e alle loro posizioni limiti al tendere di un punto semplice ad un eventuale punto

multiplo di σ^n. Se (x, y, z, t) è un punto multiplo di σ'', e, conseguentemente si annullano in esso le derivate prime di $f(x, y, z, t)$, le equazioni seconda, quarta e sesta delle (15), considerate nelle incognite con indici pari, risultano identicamente soddisfatte.

In tal caso detti ancora Q_1, Q_3 e Q_5 i punti di σ_1, σ_3 e σ_5 rispondenti a detto punto multiplo di σ, tutto l'S_{14} congiungente Q_1, Q_3, Q_5, η_2, η_4, η_6, appartiene alla varietà di equazioni (15) e (16).

Si ha pertanto:

II) *La varietà dell'* S_{23} *complesso che rappresenta il prolungamento nel campo quadriduale della superficie* σ^n *è costituita*:

a) *da eventuali* S_{14} *rispondenti agli eventuali punti multipli di* σ^n;

b) *da* ∞^2 S_{11} rispondenti ai punti semplici di σ^n.

Si noti che:

II') *Detta* σ_j'' *la superficie dello spazio* η_j $(j = 1, \ldots, 6)$ *di equazione*

$$f(x_j, y_j, z_j, t_j) = 0$$

e detto Q_j *il punto di* σ_j *rispondente, per le* (17), *ad un punto semplice* P *di* σ^n, *l'* S_{11} *rispondente a* P *è quello congiungente i tre punti* Q_1, Q_3, Q_5 *con i tre piani tangenti a* $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6$ *nei punti* Q_2, Q_4, Q_6.

Detto ancora Q'_j *il punto di* σ_j *rispondente a questo punto multiplo* M *di* σ'', *l'* S_{14} *rispondente a questo punto multiplo è quello congiungente i tre punti* Q'_1, Q'_3, Q'_5 *con i tre spazi* η_2, η_4, η_6.

Diciamo V_{13} la varietà riempita dagli ∞^2 S_{11} rispondenti agli ∞^2 punti semplici P di σ^n e dalle posizioni limiti di un tale S_{11} al tendere del punto P che lo determina, variando su σ^n, ad un punto multiplo M, considerando tutti gli eventuali punti multipli di σ^n. L'S_{11} rispondente a P, col tendere di P ad un punto multiplo M, tenderà ad un S'_{11} dell'S_{14} rispondente al punto multiplo M. Tale S'_{11} congiungerà i tre punti Q'_1, Q'_2, Q'_3 con i tre piani π'_2, π'_4, π'_6 posizioni limiti dei tre piani tangenti a $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6$ nei punti Q_2, Q_4, Q_6, col tendere di P ad M e quindi del piano π tangente a σ^n in P ad un piano tangente a σ'' nel punto multiplo M. Sicchè se M è un punto multiplo con il cono tangente non spezzato in un numero finito di piani, di tali S_{11} in S_{14} ne avremo infiniti. Se invece il cono tangente a σ'' in M è spezzato in un numero finito di piani di tali S_{11} dentro l'S_{14} ne avremo un numero finito e precisamente tanti quanti sono i piani *distinti* in cui si spezza il cono tangente. Si ha perciò.

III) *La superficie* σ^n *determina in* S_{23} *una varietà* V_{13} *costituita da*

∞^2 S_{11} *generatori in corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, con le coppie punto-piano* (P, π), *con* P *variabile in* σ^n *e* π *tangente a* σ^n *in* P, *considerando anche le posizioni limiti di tali coppie* (P, π), *col tendere di* P *ad un eventuale punto multiplo di* σ^n.

La V_{13} *con i suoi* ∞^2 S_{11} *generatori dà un modello dell'ente algebrico* ∞^2 *di cui la data superficie* σ^n *costituisce già un altro modello proiettivo.*

5. *La* V_{16} *di* S_{23} *con un sistema* $((S_{11}))$ *di* ∞^5 S_{11} *generatori descritta dalle* V_{13} *rispondenti alle superficie dell'* S_3.

Variando la superficie σ^n fra le superficie algebriche di S_3, la V_{13} ad essa corrispondente nell'S_{23} varierà, senza descrivere tutto l'S_{23} ma solo una varietà V_{16} di S_{23} costituita da ∞^5 S_{11}, perchè ogni S_{11} generatore di una detta V_{13} congiunge sempre tre punti Q_1, Q_3, Q_5 di η_1, η_3 ed η_5 e tre piani π_2, π_4, π_6 di η_2, η_4, η_6 passanti per i punti Q_2, Q_4, Q_6 soddisfacenti alle condizioni che sia i punti sia i piani si corrispondano nelle proiettività fra gli spazi η_i e gli spazi η_j in cui si corrispondono i punti $P_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$ e $P_j(x_j, y_j, z_j, t_j)$ aventi eguali coordinate. Tali S_{11} sono pertanto in corrispondenza biunivoca, con le coppie punto-piano appartenentisi dello spazio S_3.

Avremo perciò in S_{23} un sistema $((S_{11}))$ di ∞^5 S_{11} essendo ∞^5 le coppie punto-piano appartenentesi di uno spazio. Si ha perciò:

I) *Gli* ∞^2 S_{11} *generatori della* V_{13} *di* S_{23} *rispondenti alla superficie* σ^n *dell'* S_3, *variano, al variare di* σ^n *in* S_3, *in un sistema* $((S_{11}))$ *di* ∞^5 S_{11}, *di una varietà* V_{16}, *in corrispondenza biunivoca con le coppie punto-piano appartenentisi dell'* S_3.

Se indichiamo con (x, y, z, t) le coordinate di Q_j in η_j $(j = 1, \ldots, 6)$ e con (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t'') le coordinate di altri due punti M_q, N_q di η_q $(q = 2, 4, 6)$ non allineati con Q_q (e quindi con i tre punti M_q, N_q, Q_q determinanti un piano π_q di η_q), combinando linearemete secondo i parametri $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{12}$ le coordinate di detti punti nell'ordine:

$$Q_1\ Q_2\ M_2\ N_2\ Q_3\ Q_4\ M_4\ N_4\ Q_5\ Q_6\ M_6\ N_6$$

si ottengono le equazioni parametrice di un S_{11} di $((S_{11}))$. Si ha perciò:

II) *Le equazioni parametriche di un* S_{11} *generatore della* V_{16} *dell'* S_{23} *sono*:

$$[S_{11}]\quad\left\{\begin{array}{lll}
x_1=\rho_1 x & x_3=\rho_5 x & x_5=\rho_9 x\\
x_2=\rho_2 x+\rho_3 x'+\rho_4 x'' & x_4=\rho_6 x+\rho_7 x'+\rho_8 x'' & x_6=\rho_{10} x+\rho_{11} x'+\rho_{12} x''\\
y_1=\rho_1 y & y_3=\rho_5 y & y_5=\rho_9 y\\
y_2=\rho_2 y+\rho_3 y'+\rho_4 y'' & y_4=\rho_6 y+\rho_7 y'+\rho_8 y'' & y_6=\rho_{10} y+\rho_{11} y'+\rho_{12} y''\\
z_1=\rho_1 z & z_3=\rho_5 z & z_5=\rho_9 z\\
z_2=\rho_2 z+\rho_3 z'+\rho_4 z'' & z_4=\rho_6 z+\rho_7 z'+\rho_8 z'' & z_6=\rho_{10} z+\rho_{11} z'+\rho_{12} z''\\
t_1=\rho_1 t & t_3=\rho_5 t & t_5=\rho_9 t\\
t_2=\rho_2 t+\rho_3 t'+\rho_4 t'' & t_4=\rho_6 t+\rho_7 t'+\rho_8 t'' & t_6=\rho_{10} t+\rho_{11} t'+\rho_{12} t''
\end{array}\right.$$

con i 12 *parametri* $\rho_1, \ldots, \rho_{12}$.

Nota. — Lo studio della V_{16} è ripreso nel n^0 11 dopo lo studio delle falde della V_{13} rispondenti ai rami della superficie σ'' che la determina e delle trasformazioni dell'S_{23} rispondenti alle trasformazioni birazionali dell'S_3.

6. *Prolungamento di una trasformazione birazionale dell'* S_3 *complesso nell'* S_3 *quadriduale e sua rappresentazione nell'* S_{23} *ambiente della congruenza* (S_5).

Consideriamo nell'S_3 complesso una trasformazione birazionale di equazioni

$$(18)\qquad\left\{\begin{array}{l}
x' = F(x, y, z, t)\\
y' = G(x, y, z, t)\\
z' = H(x, y, z, t)\\
t' = K(x, y, z, t)
\end{array}\right.$$

con

$$(19)\qquad aF(x, \ldots, t) + bG(x, \ldots, t) + cH(x, \ldots, t) + dK(x, \ldots, t) = 0$$

sistema omaloidico di superficie di S_3.

Prolunghiamo le forme F, G, H, K nel campo triplo-biduale. il sistema (18) risulta ci dà le equazioni

$$(20)\qquad\left\{\begin{array}{l}
X' = F(X, Y, Z, T)\\
Y' = G(X, Y, Z, T)\\
Z' = H(X, Y, Z, T)\\
T' = K(X, Y, Z, T)
\end{array}\right.$$

che rappresenta una trasformazione birazionale nell'S_3 triplo-biduale.

Questa trasformazione vedremo che determina nell' S_{23} una trasformazione T che ammette come uniti i tre S_7 determinati dalle coppie di S_3 η_1 η_2, η_3 η_4, η_5 η_6 e subordina, in ciascun di essi, una trasformazione birazionale che trasforma in sè stessa la congruenza di rette immagine dell' S_3 biduale di cui ci siamo occupati in *b*) del n^0 2. Ciò segue dal fatto che il sistema (20) del campo triplo-biduale è equivalente nel campo complesso ai tre sistemi di cui il primo è:

$$(21)_{1,2} \quad \begin{cases} x'_1 = F(x_1, y_1, z_1, t_1) \\ x'_2 = \dfrac{\partial F}{\partial x_1} x_2 + \dfrac{\partial F}{\partial y_1} y_2 + \dfrac{\partial F}{\partial z_1} z_2 + \dfrac{\partial F}{\partial t_1} t_2 \\ y'_1 = G(x_1, y_1, z_1, t_1) \\ y'_2 = \dfrac{\partial G}{\partial x_1} x_2 + \dfrac{\partial G}{\partial y_1} y_2 + \dfrac{\partial G}{\partial z_1} z_2 + \dfrac{\partial G}{\partial t_1} t_2 \\ z'_1 = H(x_1, y_1, z_1, t_1) \\ z'_2 = \dfrac{\partial H}{\partial x_1} x_2 + \dfrac{\partial H}{\partial y_1} y_2 + \dfrac{\partial H}{\partial z_1} z_2 + \dfrac{\partial H}{\partial t_1} t_2 \\ t'_1 = K(x_1, y_1, z_1, t_1) \\ t'_2 = \dfrac{\partial K}{\partial x_1} x_2 + \dfrac{\partial K}{\partial y_1} y_2 + \dfrac{\partial K}{\partial z_1} z_2 + \dfrac{\partial K}{\partial t_1} t_2 \end{cases}$$

Gli altri due si ottengono dal sistema $(21)_{1,2}$ sostituendo agl' indici 1,2 una volta gl' indici 3,4 e un' altra volta gl' indici 5,6. Il sistema $(21)_{1,2}$ rappresenta la trasformazione birazionale, di cui sopra, nell' S_7 congiungente i due spazi η_1 ed η_2. Per questa trasformazione risulta unito l' S_3 η_1 in cui subordina la trasformazione, analoga alla data, di equazioni

$$(22) \quad \begin{cases} x'_1 = F(x_1, y_1, z_1, t_1) \\ y'_1 = G(x_1, y_1, z_1, t_1) \\ z'_1 = H(x_1, y_1, z_4, t_1) \\ t'_1 = K(x_1, y_1, z_1, t_1) \end{cases}$$

Analoghe osservazioni si fanno per le $(21)_{3,4}$ e le $(21)_{5,6}$, rispetto all' S_7 η_3 η_4 e all' $S_7 = \eta_5$ η_6.

Considerando in blocco le 24 equazioni date da detti tre sistemi si hanno le equazioni di *una trasformazione* T *nell'* S_{23} *che trasforma in sè stessa la congruenza* (S_5) *che dà nell'* S_{23} *la* I^a *rappresentazione dell'* S_3 *triplo-duale,* perchè ciascuno degli ∞^{18} S_5 di detta congruenza si ottiene congiungendo una terna di rette delle congruenze suddette dentro i tre S_7.

Volendo considerare la trasformazione data nell' S_3 complesso prolungata nel campo quadriduale, anzichè nel campo triplo-biduale, basta imporre, al solito, le condizioni (12) e quindi considerare nella congruenza (S_5) solo gli ∞^{12} S_5 che rappresentano in S_{23} i punti dello spazio quadri-

duale. Tale insieme di ∞^{12} S_3 è trasformato in sè stesso dalla trasformazione in S_{23} perchè dalle (12) segue, per le $(21)_{1,2}$, $(21)_{3,4}$, $(21)_{5,6}$

$$(12') \quad x'_1 = x'_3 = x'_5 \ , \ y'_1 = y'_3 = y'_5 \ , \ z'_1 = z'_3 = z'_5 \ , \ t'_1 = t'_3 = t'_5$$

Concludendo si ha:

La trasformazione birazionale di equazioni (18) *dell'* S_3 *complesso prolungata nel campo quadriduale dà una trasformazione birazionale dell'* S_3 *quadriduale rappresentata nell'* S_{23} *dalla trasformazione* T *di equazioni* $(21)_{1,2}$, $(21)_{3,4}$, $(21)_{5,6}$ *che trasforma in sè stessa il sistema degli* ∞^{12} S_5 *immagini dei punti dell'* S_3 *quadriduale* (n^0 3).

Per la trasformazione T *sono uniti i tre* S_7 $\eta_1 \eta_2$, $\eta_3 \eta_4$, $\eta_5 \eta_6$, *ed in ciascun di essi la* T *subordina una trasformazione birazionale* [*di equazioni, rispettivameute,* $(21)_{1,2}(21)_{3,4}(21)_{5,6}$] *che trasforma in sè stessa la congruenza di rette contenuta in un tale* S_7, *immagine dell'* S_3 *biduale.*

Per la trasformazione T *sono uniti, inoltre, i tre* S_3 η_1 , η_2 , η_3, *in ciascuno di essi la* T *subordina una trasformazione birazionale analoga alla data, di equazioni* (18).

7. *Trasformato del sistema* $((S_{11}))$ *mediante la trasformazione* T.

Consideriamo un S_{11}, del sistema $((S_{11}))$, di equazioni parametriche $[S_{11}]$ del n^0 5. Sostituendo nelle equazioni della trasformazione T del n^0 precedente avremo le equazioni parametriche della V'_{11} trasformata in S_{11} mediante la T.

Intanto si osservi che nei secondi membri delle prime otto equazioni della trasformazione T, cioè nelle $(21)_{1,2}$ intervengono solo le variabili $x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , z_1 , z_2 , t_1 , t_2$, che nelle equazioni parametriche di detto S_{11} risultano funzioni solo dei primi quattro parametri $\rho_1 , \rho_2 , \rho_3 , \rho_4$. Ne segue che, dopo la sostituzione, nelle $(21)_{1,2}$, le variabili $x'_1 , x'_2 , \ldots , t'_1 , t'_2$ risulteranno funzioni dei soli parametri ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 e ρ_4. Si avrà precisamente, detto m il grado F , G , H e K,

$$(23)_{1,2} \quad \begin{cases} x'_1 = \rho_1^m \, F\,(x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ t) \\ x'_2 = \rho_1^{m-1} \, F_d\,(x\ ,\ x'\ ,\ x''\ ,\ \ldots\ ,\ t\ ,\ t'\ ,\ t''\ ,\ \rho_2\ ,\ \rho_3\ ,\ \rho_4) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t'_1 = \rho_1^m \, K\,(x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ t) \\ t'_2 = \rho_1^{m\ -1} \, K_d\,(x\ ,\ x'\ ,\ x''\ ,\ \ldots\ ,\ t\ ,\ t'\ ,\ t''\ ,\ \rho_2\ ,\ \rho_3\ ,\ \rho_4) \end{cases}$$

dove s'è posto per es. in relazioni alla forma $F(x, y, z, t)$:

$$F_a(x, x', x'', \ldots, t, t', t'', \rho_2, \rho_3, \rho_4) =$$

$$(24) \quad = \frac{\partial F}{\partial x}(\rho_2 x + \rho_3 x' + \rho_4'' x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\rho_2 y + \rho_3 y' + \rho_4 y'') +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial z}(\rho_2 z + \rho_3 z' + \rho_4 z'') + \frac{\partial F}{\partial t}(\rho_2 t + \rho_3 t' + \rho_4 t'').$$

Le variabili $x_3, x_4, y_3, y_4, z_3, z_4, t_3, t_4$ risulteranno invece funzioni dei quattro parametri $\rho_5, \rho_6, \rho_7, \rho_8$ date dalle relazioni $(23)_{3,4}$ che si ottengono dalle $(23)_{1,2}$ sostituendo agl'indici 1 e 2 nei primi membri gl'indici 3 e 4; e ai parametri $\rho_1, \ldots, \rho_4$, i parametri $\rho_5, \ldots, \rho_8$ rispettivamente. Analogamente si hanno le ultime otto equazioni parametriche, che indicheremo con $(13)_{5,6}$, che danno le $x'_5, x'_6, \ldots, t'_5, t'_6$.

Si osservi che i secondi membri delle $(23)_{1,2}$ risultano tutti divisibili per ρ_1^{m-1}. Così i secondi membri delle $(23)_{3,4}$ risulteranno tutti divisibili per ρ_5^{m-1}, e quelli delle $(23)_{5,6}$ risulteranno divisibili per ρ_9^{m-1}. Ne segue che la V'_{11} trasformata dell'S_{11} mediante la T, [rappresentata da dette 24 equazioni parametriche] risulta proiettata in ciascuno dei tre S_7 congiungenti $\eta_1\ \eta_2\ \eta_3\ \eta_4\ \eta_5\ \eta_6$, dall'$S_{15}$ congiungente i due rimanenti S_7, in un S_3. Per es. quello contenuto nell'$S_7 = \eta_1\ \eta_2$ risulta rappresentato dall'equazioni $(13)_{1,2}$, che (divisi i secondi membri ρ_1^{m-1}) ci dànno le $x'_1, x'_2, \ldots, t'_1, t'_2$ funzioni *lineari* dei quattro parametri $\rho_1, \ldots, \rho_4$. L'S'_3 che esse rappresentano dentro l'$S_7 = \eta_1\ \eta_2$ congiunto con l'S_{15} opposto, congiungente $\eta_3, \ldots, \eta_6$, dà un S_{19} contenente la V'_{11}. Questa V'_{11} risulta, pertanto, appartenente all'intersezione di tre S_{19} di S_{23}, essa è, quindi, l'S'_{11} intersezione di detti tre S_{19}.

Faremo vedere che detto S'_{11}, trasformato di S_{11} del sistema $((S_{11}))$ appartiene a questo sistema. A tal fine si osservi che le $(23)_{1,2}$, dopo aver diviso i secondi membri per ρ_1^{m-1}, danno le equazioni parametriche dell'S'_3 di $S_7 = \eta_1\ \eta_3$, nella forma

$$(25)_{1,2} \quad \begin{cases} x'_1 = \rho_1 F \\ x'_2 = \rho_2 F + \rho_3 F' + \rho_4 F'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t'_1 = \rho_1 K \\ t'_2 = \rho_2 K + \rho_3 K' + \rho_4 K'' \end{cases}$$

dove s'è posto

$$(26)\qquad \begin{cases} F' = \dfrac{\partial F}{\partial x}\,x' + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,y' + \dfrac{\partial F}{\partial z}\,z' + \dfrac{\partial F}{\partial t}\,t' \\ F'' = \dfrac{\partial F}{\partial x}\,x'' + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,y'' + \dfrac{\partial F}{\partial z}\,z'' + \dfrac{\partial F}{\partial t}\,t'' \end{cases}$$

e le analoghe, in relazioni alle altre tre funzioni $G(x, y, z, t)$, $H(x, y, z, t)$ e $K(x, y, z, t)$. Tale S'_3 di $S_7 = \eta_1\,\eta_2$ è perciò lo spazio congiungente i quattro punti

$$(27)\quad \overline{Q}_1(F, G, H, K), \overline{Q}_2(F, G, H, K), \overline{M}_2(F', G', H', K'), \overline{N}_2(F'', \ldots, K'')$$

il primo in η_1 e gli altri tre in η_2, [e con $\overline{Q}_1$ e $\overline{Q}_2$ *aventi le stesse coordinate*].

Analoghe osservazioni si fanno rispetto alle $(23)_{3,4}$, $(23)_{5,6}$ e si ha che l'S_3 che l'S'_{11} in $S_7 = \eta_3\,\eta_4$ congiunge i quattro punti $\overline{Q}_3$, $\overline{Q}_4$, $\overline{M}_4$, $\overline{N}_4$ con le stesse coordinate dei quattro punti (27), e l'S_3 che l'S'_{11} ha in $S_7 = \eta_5\,\eta_6$ congiunge i quattro punti $\overline{Q}_5$, $\overline{Q}_6$, $\overline{M}_6$, $\overline{N}_6$ pure con le stesse coordinate dei punti (27). Segue perciò che l'S'_{11} è precisamente un iperspazio del sistema $((S_{11}))$. Si ha perciò:

I) *La trasformazione* T *dell'* S_{23} *immagine di una trasformazione birazionale dell'* S_3 *quadriduale, prolungamento di una trasformazione dell'* S_3 *complesso nel campo quadriduale, trasforma in sè stesso il sistema* $((S_{11}))$ *rispondente alle* ∞^5 *coppie punto-piano appartenentisi dell'* S_3 *complesso.*

II) *La trasformazione* T *trasforma gli* ∞^2 S_{11} *generatori della* V_{13}, *determinata in* S_{23} *dalla superficie* σ'' *dell'* S_3 *complesso, in una* V'_{13} *che sarà costituita pure da* ∞^2 S'_{11} *generatori, e che sarà la* V'_{13} *determinata in* S_{23} *dalla superficie* σ' *dell'* S_3 *complesso trasformata della superficie* σ *per la data trasformazione birazionale nell'* S_3 *complesso che determina la* T.

8. Nota. — E' bene osservare che dei dodici punti che determinano l'S'_{11} trasformato dell'S_{11} mediante la T, tre di essi e precisamente:

$\overline{Q}_1, \overline{Q}_3, \overline{Q}_5$ *sono i corrispondenti nella* T *dei tre punti* Q_1, Q_3 *e* Q_5. *I rimanenti 9 punti* $\overline{Q}_s, \overline{M}_s, \overline{N}_s$ $(s = 2, 4, 6)$ *sono i corrispondenti nella* T *di nove punti posti, rispettivamente, negl'intorni dei nove punti* Q_s, M_s, N_s *delle nove rette* $Q_s\,Q_{s-1}$, $M_s\,Q_{s-1}$, $N_s\,Q_{s-1}$. [*I punti* Q_s, M_s *ed* N_s $(s = 2, 4, 6)$ *sono fondamentali per la* T perchè per questa trasformazione sono fondamentali tutti i punti dei tre S_3 η_2, η_4 ed η_6, come si ricava $(21)_{1,2}$ e

$(21)_{3,4}$ e $(21)_{5,6}$ annullando nei secondi membri le coordinate di indice dispari e quindi tutti i secondi membri]. Per dimostrare le suddette proprietà si consideri, per es, nell'S_3 η_2 un punto $P^*_2\,(x^*, y^*, z^*, t^*)$. Le equazioni parametriche della retta $P^*_2\,Q_1$, con $Q_1\,(x, y, z, t)$ in η_1 sono (in $S_7 = \eta_1\,\eta_2$) $x_1 = \lambda x$, $x_2 = x^*$, $y_1 = \lambda y$, $y_2 = y^*$, $z_1 = \lambda z$, $z_2 = z^*$, $t_1 = \lambda t$, $t_2 = t^*$.

Sostituendo nelle $(21)_{1,2}$, dividendo per λ^{m-1}, e facendo tendere λ a zero, (e quindi il punto, corrente nella retta, a P^*_2) si hanno le coordinate del punto, corrispondente nella T, posto nell'intorno del punto P^*_2 e nella retta $P^*_2\,Q_1$: tali coordinate sono precisamente:

$$(29)_{1,2}\qquad \begin{cases} x'_1 = y'_1 = z'_1 = t'_1 = 0 \\ x'_2 = \dfrac{\partial F}{\partial x}\,x^* + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,y^* + \dfrac{\partial F}{\partial z}\,z^* + \dfrac{\partial F}{\partial t}\,t^* \\ y'_2 = \dfrac{\partial G}{\partial x}\,x^* + \dfrac{\partial G}{\partial y}\,y^* + \dfrac{\partial G}{\partial z}\,z^* + \dfrac{\partial G}{\partial t}\,t^* \\ z'_2 = \dfrac{\partial H}{\partial x}\,x^* + \ldots \\ t'_2 = \dfrac{\partial K}{\partial x}\,x^* + \ldots \end{cases}$$

Le $(29)_{1,2}$ per $x^* = x$, $y^* = y$, $z^* = z$, $t^* = t$, cioè per $P_2 = Q_2$ dànno il punto $\overline{Q}_2\,(F, G, H, K)$. Per $x^* = x'$, $y^* = y'$, $z^* = z'$, $t^* = t'$, cioè per $P^*_2 = M_2$, dànno il punto $\overline{M}_2\,(F', G', H', K')$. Infine per $x^* = x''$, $y^* = y''$, $z^* = z''$, $t^* = t''$ cioè per $P_2 = N_2$, dànno il punto $\overline{N}_2\,(F'', G'', H'', K'')$, come sopra si è affermato.

9. *Le falde della* V_{13} *rispondenti ai rami e alle falde della superficie* σ''. *Sviluppo di un esempio.*

Se un punto P della superficie σ'', assegnata nell'S_3 complesso, descrive un ramo di equazioni

$$(30)\qquad x = x\,(\lambda)\,,\quad y = y\,(\lambda)\,,\quad z = z\,(\lambda)\,,\quad t = t\,(\lambda)$$

con i secondi membri serie di potenze della variabile complessa λ convergenti in un cerchio del piano di Gauss dove si suppone distesa la variabile λ, e col centro nel punto affissa del valore $\lambda = 0$, l'S_{11} della V_{13} rispondente al punto P della σ'' descriverà una falda di dimensione 12 con l'S''_{11} rispondente all'origine P_0 del ramo (30). Le coordinate di P_0 sono date dai termini noti delle quattro serie (30) che si possono supporre non tutti nulli (premettendo, eventualmente, la divisione per una potenza di λ,

dato che le coordinate sono definite a meno di un fattore). Ciò nell'ipotesi che P_0 non sia un punto multiplo della superficie σ''. Se P_0 è un punto multiplo di σ'' si considera un punto P del ramo, semplice per la σ'', ed il relativo S_{11} ad esso corrispondente nella V_{13}, al tendere di P, lungo il ramo, all'origine P_0, l'S_{11} generatore della falda V_{12} di V_{13}, rispondente al ramo, varierà e tenderà ad una posizione limite S^0_{11}, che sarà l'origine di detta falda, e contenuto nell'S_{14} di S_{23} rispondente al punto multiplo P_0 della σ''.

Se π è il piano tangente a σ'' nel punto P e diciamo P' e P'' le intersezioni di π con due rette r' ed r'' prefissate in posizione generica nell'S_3 ambiente della σ'', si può supporre il piano π determinato dai tre punti P, P', P''. Le coordinate $(x', \ldots, t')$ di P' e $(x'' \ldots, t'')$ di P'' risulteranno dipendenti dai coefficicenti dell'equazione del piano π tangente a σ'' nel suo punto semplice $P(x(\lambda), \ldots, t(\lambda))$, del ramo di equazioni (30). Si avranno perciò delle equazioni

$$(30') \qquad x' = x'(\lambda) \ , \quad y' = y'(\lambda) \ , \quad z' = z'(\lambda) \ , \quad t' = t'(\lambda)$$

$$(30'') \qquad x'' = x''(\lambda) \ , \quad y'' = y''(\lambda) \ , \quad z'' = z''(\lambda) \ , \quad t'' = t''(\lambda)$$

che daranno le coordinate di P' e P'' in funzione del parametro λ. Per ogni valore di λ dentro il cerchio di convergenza delle serie (3), e quindi per il generico punto P del ramo, si avranno, in corrispondenza, i punti P' e P'' del piano tangente a σ'' in P, e che dovranno variare, per ipotesi, nelle prefissate rette r' ed r''. Le (30') e (30'') daranno, pertanto, punti appartenenti ad r' ed r' e i termini noti, rispondenti al valore $\lambda = 0$, daranno le coordinate dei punti in cui r' ed r' sono secati dal piano π *nella posizione limite* π_0 *che assume mentre* P *descrive il ramo e tende al punto* P_0, (origine del ramo) semplice o multiplo per la σ''.

Si considerino, ora, le equazioni parametriche dell'S_{11} di S_{23} rispondente al punto P, di σ cioè alla coppia punto-piano (P, π) e quindi determinato dai 12 punti $Q_j(x,y,z,t)$ $M_\eta(x',y',z',t')$, $N_\eta(x'',y'',z'',t'')$ $(j = 1,\ldots,6)$ $(q = 2,4,6)$ cioè le equazioni $[S_{11}]$ del n^0 5. Sostituendo in queste equazioni le (30), (30') e (30'') si avranno le equazioni di detto S_{11}, con i dodici parametri omogenei $\rho_1, \ldots, \rho_{12}$, e con coefficienti x,y,z,t, x',y',z',t', x'',y'',z'',t'', che risulteranno dipendenti dal parametro non omogeneo λ mediante le (30), (3') e (3''). [L'S^0_{11} risponde alla coppia (P_0, π_0)].

Per sviluppare un esempio consideriamo il ramo di equazioni

$$(31) \qquad x = 1 \ , \quad y = \lambda^2 \ , \quad z = \lambda^3 \ , \quad t = \lambda$$

appartenente alla superficie σ^2 di equazione

$$(32) \qquad f = y^2 - zt = 0,$$

(cono quadrico con il vertice del punto (1,0,0,0), origine del ramo, rispondente al valore $\lambda = 0$)). In questo caso si ha:

$$(33) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \ , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -t \ , \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -z$$

e l'equazione del piano π^* tangente al cono in un suo punto $P^*(x^*,...,t^*)$ è data da:

$$(34) \qquad 2y^* y - t^* z - z^* t = 0$$

Nel piano π^* fissiamo come punto P′ l'intersezione con la retta $x = 0$, $t = 0$, e come punto P″ l'intersezione con la retta $x = 0$, $z = 0$. Tali punti sono, per la (34)

$$(35) \qquad P'(0, t^*, 2y^*, 0) \quad , \quad P''(0, z^*, 0, 2y^*).$$

Supposto P^* appartenente al ramo di equazioni (31) e rispondente al valore λ del parametro, cioè posto

$$x^* = 1 \ , \quad y^* = \lambda^2 \ , \quad z^* = \lambda^3 \ , \quad t^* = \lambda,$$

le (35) danno

$$(36) \qquad P'(0, \lambda, 2\lambda^2, 0) \quad , \quad P''(0, \lambda^3, 0, 2\lambda^2)$$

ovvero,

$$(37) \qquad P'(0, 1, 2\lambda, 0) \quad , \quad P''(0, \lambda, 0, 2)$$

Pertanto, nel sudetto esempio le (30) (30′) e (30″) sono rispettivamente:

$$(30_1) \qquad x = 1 \ , \quad y = \lambda^2 \ , \quad z = \lambda^3 \ , \quad t = \lambda$$

$$(30'_1) \qquad x' = 0 \ , \quad y' = 1 \ , \quad z' = 2\lambda \ , \quad t' = 0$$

$$(30''_1) \qquad x'' = 0 \ , \quad y'' = \lambda \ , \quad z'' = 0 \ , \quad t'' = 2.$$

Le equazioni parametriche della falde V_{12} *della* V_{13} *rispondente al ramo* (31) *del cono* σ^2 *di equazioni* (32) *sono:*

$$(38)\quad \begin{cases} x_1=\rho_1 & x_3=\rho_5 & x_5=\rho_9 \\ x_2=\rho_2 & x_4=\rho_6 & x_6=\rho_{10} \\ y_1=\lambda^2\rho_1 & y_3=\lambda^2\rho_5 & y_5=\lambda^2\rho_9 \\ y_2=\lambda^2\rho_2+\rho_3+\rho_4\lambda & y_4=\lambda^2\rho_6+\rho_7+\lambda\rho_8 & y_6=\lambda^2\rho_{10}+\rho_{11}+\lambda\rho_{12} \\ z_1=\lambda^3\rho_1 & z_3=\lambda^3\rho_5 & z_5=\lambda^3\rho_9 \\ z_2=\lambda^3\rho_2+2\lambda\rho_3 & z_4=\lambda^3\rho_6+2\lambda\rho_7 & z_6=\lambda^3\rho_{10}+2\lambda\rho_{11} \\ t_1=\lambda\rho_1 & t_3=\lambda\rho_5 & t_5=\lambda\rho_9 \\ t_2=\lambda\rho_2+2\rho_4 & t_4=\lambda\rho_6+2\rho_8 & t_6=\lambda\rho_{10}+2\rho_{12} \end{cases}$$

Considerando la falda V_{11} come *insieme di* ∞^1 S_{11} rispondenti ai valori del parametro λ, *l'esponente all'origine della falda* V_{12} di equazioni (38) è 0, e *l'origine è l'* S^0_{11} *di equazioni:*

$$(39)\quad \begin{cases} x_1=\rho_1 & x_3=\rho_5 & x_5=\rho_9 \\ x_2=\rho_2 & x_4=\rho_6 & x_6=\rho_{10} \\ y_2=\rho_3 & y_4=\rho_7 & y_6=\rho_{11} \\ t_2=2\rho_4 & t_4=2\rho_8 & t_6=2\rho_{12} \\ y_1=z_1=z_2=t_1=y_3=z_3=z_4=t_3=y_5=z_5=z_6=t_5=0 \end{cases}$$

Tale origine risponde alla posizione limite dell'S_{11} generatore della V_{12}, al variare del parametro λ, col tendere di λ al valore $\lambda=0$ cioè col tendere del punto P*, variabile nel ramo, all'origine (1, 0, 0, 0) del ramo. (Punto singolare della superficie σ^2). Sicchè a questo punto singolare della superficie, *considerato come origine del ramo* di equazioni parametriche (31), risponde un ben determinato S^0_{11} nella V_{13} rispondente alla superficie σ^2, e precisamente l'origine S^0_{11} della falda V_{12} della V_{13} rispondente alla origine del ramo considerato.

Si osservi che nell'esempio considerato le equazioni (15) rispondenti al cono quadrico σ^2 sono:

$$(40)\quad \begin{cases} y_1^2-z_1t_1=0 \\ 2y_1y_2-t_1z_2-z_1t_2=0 \\ y_3^2-z_3t_3=0 \\ 2y_3y_4-t_3z_4-z_3t_4=0 \\ y_5^2-z_5t_5=0 \\ 2y_5y_6-t_5z_6-z_5t_6=0. \end{cases}$$

L' S_{14} *rispondente al punto doppio, vertice del cono,* (1, 0, 0, 0), *è quello di equazioni:*

$$(41)\qquad y_1=z_3=t_5=y_1=z_3=t_5=y_1=z_3=t_5=0.$$

Si noti che l'S^0_{11} rispondente a tale punto doppio come origine del

ramo considerato, cioè l'S^0_{11} di equazioni (39), appartiene a detto S_{14} di equazioni (41), come dovevasi verificare. Tale S^0_{11} del sistema $((S_{11}))$ deve rispondere alla coppia punto piano appartenentesi costituita dal punto vertice del cono e dal particolare piano tangente al cono nel vertice a cui tende il piano tangente al cono nel punto P* al variare di P* nel ramo col tendere di P* all'origine del ramo. Tale piano congiungente il vertice (1, 0, 0, 0) con i due punti (0, 1, 0, 0) e (0, 0, 0, 1) a cui tendono i due punti P′ e P″ dati dalle (37) al tendere di λ a zero. *A tale coppia punto piano risponde*, precisamente, *nel sistema* $((S_{11}))$ *l'*S^0_{11} *di equazioni* (39).

Considerando nella falda di equazioni (38) la *ridotta* di grado 1 nel parametro λ si ha la V'_{12} di equazioni parametriche:

$$
(40)\quad \begin{cases}
x_1 = \rho_1 & x_3 = \rho_5 & x_5 = \rho_9 \\
x_2 = \rho_2 & x_4 = \rho_6 & x_6 = \rho_{10} \\
y_2 = \rho_3 + \lambda\rho_4 & y_4 = \rho_7 + \lambda\rho_8 & y_6 = \rho_{11} + \lambda\rho_{12} \\
z_2 = 2\lambda\rho_3 & z_4 = 2\lambda\rho_7 & z_6 = 2\lambda\rho_{11} \\
t_1 = \lambda\rho_1 & t_3 = \lambda\rho_5 & t_5 = \lambda\rho_9 \\
t_2 = \lambda\rho_2 + 2\rho_4 & t_4 = \lambda\rho_6 + 2\rho_8 & t_6 = \lambda\rho_{10} + 2\rho_{12} \\
y_1 = z_1 = y_3 = z_3 = y_5 = z_5 = 0
\end{cases}
$$

Considerando nelle (38) fissati i valori delle ρ_j non tutti nulli, si hanno l'∞^1 equazioni parametriche di una cubica direttrice della V_{12} ed al valore $\lambda = 0$ del parametro si ha il punto P⁰ della cubica di coordinate (39) appartenente all'S^0_{11}. Le (40) danno le equazioni parametriche della tangente a detta cubica direttrice nel punto P⁰. Ne segue che: V'_{12} *di equazioni parametriche* (40) *è costituita dalle* ∞^{11} *rette tangenti alle* ∞^{11} *cubiche direttrici della* V_{12} *nei loro punti di appoggio nell'*S^0_{11}.

Nota. — Lo studio delle falde della V_{13}, di dimensione massima 13 rispondenti alle falde bidimensionali di σ^n, considerando *i rami naturali* di queste falde, si riconduce allo studio delle falde di dimensione 12 rispondenti a questi rami, in entrambi i casi in cui la falda di σ^n abbia per origine un punto o una curva (razionale).

10. *Le equazioni parametriche della* V_{16} *dell'*S_{23} *riempito da tutte le* V_{13} *rispondenti alle superficie algebriche dell'*S_3 *complesso.*

Abbiamo già osservato che gli ∞^2 S_{11} generatori della V_{13} di S_{23} [rispondente alla superficie σ^n, fissata nell'S_3 complesso] al variare di detta superficie variano in un sistema $((S_{11}))$ di ∞^5 S_{11}, di una varietà V_{16} i cui ∞^5 S_{11} generatori sono in corrispondenza biunivoca senza eccezione con le

∞^5 coppie punto-piano appartenentisi dell'S_3 complesso, (n^0 5,I). Le stesse equazioni [S_{11}] dell'S_{11} generatore, considerando come parametri, non solo le $\rho_1, \ldots, \rho_{12}$, ma anche le coordinate dei punti

$$Q_j(x, y, z, t) \quad , \quad M_q(x', y', z', t') \quad , \quad N_q(x'', y'', z'', t'').$$

ci danno le equazioni parametriche di detta V_{16}, con parametri sovrabondanti. Volendo le equazioni parametriche della V_{16} con 17 parametri omogenei si può imporre, in primo luogo, che i punti M_q ed N_q, che insieme al punto Q_q determinano il piano π_q dell'S_3 η_q ($q = 2, 4, 6$), appartengano a due fissate rette di η_q, assumendo per es. nulle le prime due coordinate di N_q e le ultime coordinate di M_q, sicchè avremo i punti

$$Q_j(x, y, z, t) \quad , \quad M_q(x', y', 0, 0) \quad , \quad \lambda\, N(0, 0, z'', t'')$$

Essendo tali coordinate definite a meno di un fattore possiamo inoltre supporre eguali, per es. le coordinate non nulle, cioè, la t, la y' e la t'' e precisamente eguali ad una delle ρ_j [anche, ne definite a meno di un fattore] pen es. alla ρ_{12}. Le rimanenti coordinate x, y, z, x', y'' le indicheremo, rispettivamente con $\rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{15}, \rho_{16}, \rho_{17}$. Fatte queste posizioni si otterranno *le equazioni parametriche della* V_{16}, *con i 17 parametri omogenei* $\rho_1, \ldots, \rho_{17}$, *con i secondi membri funzioni omogenee quadratiche di detti parametri.* Si hanno precisamente le equazioni:

$$(V_{16}) \begin{cases} x_1 = \rho_1\rho_{13} & x_3 = \rho_5\rho_{13} & x_5 = \rho_9\rho_{13} \\ x_2 = \rho_2\rho_{13} + \rho_3\rho_{16} & x_4 = \rho_6\rho_{13} + \rho_7\rho_{16} & x_6 = \rho_{10}\rho_{13} + \rho_{11}\rho_{16} \\ y_1 = \rho_1\rho_{14} & y_3 = \rho_5\rho_{14} & y_5 = \rho_9\rho_{14} \\ y_2 = \rho_2\rho_{14} + \rho_3\rho_{12} & y_4 = \rho_6\rho_{14} + \rho_7\rho_{12} & y_6 = \rho_{10}\rho_{14} + \rho_{11}\rho_{12} \\ z_1 = \rho_1\rho_{15} & z_3 = \rho_5\rho_{15} & z_5 = \rho_9\rho_{15} \\ z_2 = \rho_2\rho_{15} + \rho_4\rho_{17} & z_4 = \rho_6\rho_{15} + \rho_8\rho_{17} & z_6 = \rho_{10}\rho_{15} + \rho_{12}\rho_{17} \\ t_1 = \rho_1\rho_{12} & t_3 = \rho_5\rho_{12} & t_5 = \rho_9\rho_{12} \\ t_2 = \rho_2\rho_{12} + \rho_4\rho_{12} & t_4 = \rho_6\rho_{12} + \rho_8\rho_{12} & t_6 = \rho_{10}\rho_{12} + \rho_{12}^2 \end{cases}$$

dove le $\rho_{12}, \rho_{13}, \ldots, \rho_{17}$ sono legate alle coordinate di Q_j, M_q, N_q dalle posizioni sopra fatte

$$(41) \quad t = y' = t'' = \rho_{12}, x = \rho_{13}, y = \rho_{14}, z = \rho_{15}, x' = \rho_{16}, z'' = \rho_{17}$$

La trasformazione birazionale fra la V_{16} e l'S^*_{16} dove si suppongono coordinate $(\rho_1, \ldots, \rho_{17})$, rappresentata dalle stesse equazioni (V_{16}), fa corrispondere alle sezioni iperpiane della V_{16} il sistema lineare (V^2_{15}) di iperquadriche dell'S^*_{16} determinato dalle 24 iperquadriche di S_{16} le cui equazioni si ottengono eguagliando a zero i secondi membri delle equazioni (V_{16}).

I punti dell'S^*_4 di equazioni

$$\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_{12} \tag{42}$$

ed i punti dell'S^*_{10} di equazioni

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{15} = \rho_{16} = \rho_{17} = 0 \tag{42'}$$

risultano (fondamentali per detta trasformazione birazionale, e) punti base per il sistema ∞^{23} di iperquadriche (V^2_{15}) dell'S^*_{16}.

Ad un generico S^*_{11} di S^*_{16} della stella di vertice S^*_{10} risponderà nella V_{16} un S_{11} generatore, perchè in tale S^*_{11} il sistema (V^2_{15}) immagine delle sezioni iperpiane seca il sistema delle iperquadriche spezzate nell'S^*_{10} base e nel sistema di tutti gl'iperpiani (di grado 1). Sicchè:

Gli ∞^5 S_{11}, *generatori della* V_{16}, *rispondono agli* ∞^5 S_{11} *della stella di vertice* S^*_{10}.

Ad un S^*_5 generico passante per l'S^*_4 base risponderà nella V_{16} un S_5 perchè anche in questo S^*_5 il sistema (V^2_{15}) seca, fuori dell'S^*_4 base, il sistema degl'iperpiani (di grado 1). Nella V_{16} avremo pertanto ∞^{11} S^*_5, rispondenti agl'∞^{11} S^*_5 della stella di vertice S^*_4, che diremo *direttori*, perchè ciascuno di essi interseca in un punte ogni S_{11} generatori dato che l'S^*_5 considerato nella stella seca in un punto ciascuno degli S^*_{11} della stella di vertice S^*_{10}. Sicchè:

La V_{16} *contiene* ∞^{11} S_5 *direttori rispondenti agli* ∞^{11} S^*_5 *della stella di vertice* S^*_4. *Per un punto della* V_{16} *passa un* S_5 *direttore ed un* S_{11} *generatore.*

Determinazioni di ascensione retta del pianetino Vesta e dei pianeti Urano e Giove

Nota del dott. **Riccardo Barbatelli**, *presentata dal socio ord.* **Luigi Carnera**

(Adunanza del dì 15 maggio 1954)

Sunto. – Si espongono i risultati ottenuti nelle osservazioni meridiane dei grandi pianeti e di un pianetino eseguite dall'A. all'Osservatorio Astronomico di Napoli nel 1953, con le riduzioni.

In un primo lavoro, eseguito in collaborazione col compianto dott. Mario Castellano, pubblicato nel 1953 sui Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, ho riportato le osservazioni meridiane dei pianetini Vesta e Cerere e del pianeta Urano eseguite durante gli anni 1952 e 1953.

In questa seconda nota riporto i risultati di osservazioni meridiane di Vesta, Urano e Giove eseguite nell'anno 1953.

Anche queste determinazioni sono state effettuate, con lo stesso metodo adoperato nella nota precedente e con lo stesso strumento dei passaggi « Bamberg ».

Le posizioni fondamentali, a cui viene riferita la posizione di Vesta, Urano e Giove, sono state prese dal FK3.

Per la determinazione dell'azimut strumentale, sono sempre state osservate anche una o due circumpolari, delle quali una in culminazione superiore ed una inferiore e dei due valori ottenuti si è fatta la media sera per sera.

Per Vesta ed Urano, apparendo i due astri quasi puntiformi, si è ssmpre bisecato il centro del dischetto, invece, per Giove si è portato il filo mobile a contatto del lembo che appariva prima nel campo del cannocchiale e con tale filo, sempre tangente al lembo, si è seguito il pianeta fino a circa metà del campo, dopo l'inversione si è portato il filo tangente allo stesso lembo ripetendo l'operazione.

Dopo aver ricavato per tutti e tre l'A. R. sera per sera, si è dedotto dalla « American Ephemeris and Nautical Almanac » del 1953, il corrispondente valore calcolato (tenendo conto delle differenze prime e seconde) per il confronto.

Per quanto riguarda Giove si è tenuto conto delle dimensioni del se-

midiametro equatoriale (aggiungendolo ai tempi dei passaggi del lembo superiore) per far sì da potersi riferire al centro del disco.

A pagina 459 della « American Ephemeris and Nautical Almanac » del 1953, sono tabulati i valori del diametro equatoriale e della correzione di fase. Dalle citate effemeridi si sono presi i valori dei diametri equatoriali che divisi per due sono stati quindi trasformati in tempo; il numero ottenuto volta per volta si è aggiunto rispettivamente al tempo osservato del passaggio.

Per la correzione di fase (avendo osservato il terminatore antecedente nelle ore mattutine), dopo aver fatta la trasformazione in tempo, si ottiene per tutti i valori osservati dei passaggi una correzione costante $-O^1.O1$.

Le coordinate delle stelle di confronto sono state ricavate dalle « Apparent Places of Fundamental Stars » del 1953; esse sono:

Per Vesta

γ Aquilae	μ Aquarii	74 Pegasi	I. H. Lacertae
η Aquilae	33 Vulpeculae	ε Pegasi	π Aquarii
Groo. 1359 Cam.	ξ Cygni	π^2 Cygni	30 H. Camelopardi
α^2 Capricorni	δ Capricorni	16 Pegasi	38 Pegasi
γ Cygni	B. D. 84 196 Cam.	98 G. Aquarii	η Aquarii
ν Capricorni	ν Aquarii	α Aquarii	λ Pegasi
ψ Capricorni	σ Cygni	π Pegasi	76 H. Draconis
76 Draconis	2G Pegasi	27 Pegasi	

Per Urano e Giove

λ Tauri	γ Orionis	ε Geminorum	ζ Canis Min.
44 Tauri	χ Aurigae	δ Geminorum	I Cancri
Piazzi 4^h 148	ν Aurigae	ω Geminorum	ρ Puppia
ε U. Min.	α Orionis	2 G. Canis Min.	29 Cancri
i Tauri	β Aurigae	51 Geminorum	δ Cancri
β Eridani	F. Geminorum	19 Lyncis	ζ Hydrae
μ Aurigae	K. Aurigae	β Canis Min.	Braddley 1268
B. D. 85^0 74 H Ceph	7 Monocerontis	α Geminorum	93 G. Hydrae
λ Aurigae	Braddley 2412 Drac	α Geminorum	K. Cancri

Le A. R. ottenute, sono riportate alla 3ª colonna delle tabelle; le differenze O — C tra i valori osservati e quelli calcolati sono riportati alla 4ª colonna:

TABELLA I (Vesta)

Data	Ora di T. U.	A. R.	O—C	N. stelle confronto
1953 lug. 15	$1^h\ 44^m\ 0^s.7$	$22^h\ 15^m\ 00^s.60$	+ $0^s.17$	11
16	40 0.4	14 40.30	09	14
17	36 0.1	14 18.42	05	17
21	18 0.8	12 34.82	13	13
24	05 0.5	10 56.97	10	15
26	0 56 0.5	09 44.85	11	14
28	47 0.3	08 26.92	10	13
ag. 31	33 0.5	21 39 14.02	04	14
set. 2	21 50 0.5	37 40.56	19	13
3	31 0.9	36 55.49	18	16
6	27 0.3	34 48.06	09	12
7	00 0.3	34 08.25	20	16
13	21 00 0.3	21 30 42.51	11	12
14	20 55 0.9	30 13.89	11	11
15	51 0.5	29 47.12	12	13
17	42 0.9	28 58.65	19	12

TABELLA II (Urano)

Data	Ora di T. U.	A. R.	O—C	N. stelle confronto
1953 ott. 31	$4^h\ 03^m\ 03^s$	$7^h\ 40^m\ 05^s18$	— $0^s.01$	13
nov. 10	3 23 07	39 48 04	— .00	13
13	11 08	39 38 38	— .06	21
16	2 59 08	39 26 83	— .10	15
18	51 08	39 18 24	— .01	20
22	35 07	38 58 25	— .05	22

TABELLA III (Giove)

Data	Ora di T. U.	A. R.	O—C	N. stelle confronto
1953 ott. 9	$3^h\ 30^m\ 06^s$	$5^h\ 44^m\ 25^s79$	— $0^s.21$	11
31	2 06 04	42 26 22	— .28	13
nov. 10	1 24 01	39 36 34	— .26	13
13	11 01	38 19 92	— .29	21
16	0 58 01	37 03 54	— .33	15
18	49 04	36 09 48	— .31	20
22	31 08	34 14 43	— .32	22

Considerando gli scarti dei singoli valori (O — C) dalla media quali errori, delle singole determinazioni serali, risultano rispettivamente quali errori medii delle determinazioni serali:

Pianeta	N. Osserv.	(O — C) medio	E. M.
Vesta	16	+ 0^s.12	± 0^s.049
Urano	6	— 0 .04	± 0 .039
Giove	7	— 0 .28	± 0 .042

Nel lavoro pubblicato precedentemente per Vesta si è trovato per aprile 1952 un valore medio di O — C = + 0^s.21 ; in questo invece il medio O — C = + 0^s.12, nell' aprile 1952 le osservazioni furono 8 con 6,4 stelle di confronto in media.

Ora invece le osservazioni sono state 16 con 15,4 stelle in media ognuna.

Per Urano in febbraio marzo 1953 risultò in media O — C = — 0^s.05 con 13 osservazioni e 9 stelle di confronto: nella determinazione attuale, con 6 osservazioni, si è ottenuto un O — C = — 0^s.04 con 13,4 stelle di confronto in media.

Per quanto riguarda Giove, le differenze tra i valori osservati e calcolati, come risulta dalla tabella III, sono in buon accordo tra di loro, e sono anche in accordo con i valori relativi dell' anno 1945 pubblicati dal Prof. G. Armellini, Mem. Soc. Astr. Ital., XIX — 2, 1948.

Le stelle osservate in media furono 16,4.

I foraminiferi della scogliera a Cladocora caespitosa della Punta delle Pietre Nere presso il lago di Lesina, in provincia di Foggia

Nota della dott. **Maria Moncharmont Zei**, *presentata dal socio* **G. D' Erasmo**

(Adunanza del dì 15 maggio 1954)

Sunto. — Viene presa in esame la microfauna della scogliera a *Cladocora caespitosa* della Punta delle Pietre Nere, presso il Lago di Lésina (Foggia), descrivendo 93 specie di Foraminiferi.

Nel complesso la microfauna, in accordo con i Molluschi e con i Coralli, indica un habitat caldo, che, per la presenza di talune specie, potrebbe essere avvicinato a quello proprio delle acque basse tropicali. In base a tali elementi il deposito a *Cladocora* viene ascritto al Tirreniano o ad una successiva fase interglaciale, probabilmente corrispondente alla trasgressione Versiliana.

La Punta delle Pietre Nere, così detta per il colore delle sue rocce, è situata sulla costa adriatica ad Ovest del Gargano ed a Nord della porzione occidentale del Lago di Lésina. Essa, com' è noto, è costituita da rocce sedimentarie triassiche, accompagnate da rocce ignee a tipo lamprofirico (sienitico e dioritico), che non trovano alcun riscontro nè nelle formazioni circostanti nè in quelle del Gargano, dove i calcari cretacei rappresentano il termine più antico conosciuto.

La singolare situazione di questi affioramenti ha attratto, sin da tempi molto remoti, l' interesse degli studiosi [1]), che in base alla malacofauna (*Myophoria vestita, Myoph. inaequicostata, Avicula gea, Leda percaudata* ecc.) presente in quei calcari ne hanno stabilita l' appartenenza al Raibliano.

Oltre ai predetti affioramenti mesozoici, che si protendono nel mare per alcune decine di metri, si osserva, ai due lati della Punta, un' altra interessante formazione costituita da una panchina calcarea giallastra,

---

[1]) v. Tchihatcheff P., *Geognostische Schilderung des Monte Gargano in den Jahren 1839 u. 1840*, N. Jahrbuch für Min., Geogn., Geol. u. Petrefaktenkunde ecc., 1841, pag. 52-56.

Id., *Coup d' oeil sur la constitution des provinces méridionales du royaume de Naples, suivi de quelques notions sur Nice et ses environs*. Berlin, 1842, pag. 49.

Pilla L., *Rapporto 1° e 2° a S. E. il Ministro segretario degli affari interni, sulla struttura geologica del Gargano*. Atti della Società economica di Capitanata, vol. 5°, Napoli, 1840.

per la quale più propriamente riterrei di usare il termine di *scogliera a Cladocora* [1]).

Questa emerge di poco dal mare e soltanto in alcuni lembi, completamente a secco ed attaccati alla spiaggia, raggiunge i 50-100 cm. s. l. m. Questo affioramento, di formazione assai recente, è costituito per la massima parte da colonie di *Cladocora caespitosa* e conchiglie di Molluschi. Viola e Di Stefano [2]) nel segnalare alle Pietre Nere la presenza di tale « panchina » riportano le seguenti specie di Molluschi [3]):

Spondylus gaederopus (L).	*Donax trunculus* (L).
Chlamys pusio (L).	*Astralium (Bolma) rugosa* (L).
« *varia* (L).	*Gibbula magus* (L).
Arca (Barbatia) lactea (L).	*Calliostoma exasperatum* (Penn.)
« *Noae* (L.)	« *zizyphinum* (L.)
Pectunculus violacescens (L.)	*Clauneulus corallinus* (Gml.)
Cardium edule (L.)	*Cerithium vulgatum* (Brug.)
Tapes decussatus (L.)	*Cerithiolum lacteum* (Ph.)
Venus gallina (L.)	« *scabrum* (Ol.)
« *verrucosa* (L.)	*Vermetus subcancellatus* (Biv.)

Tale affioramento è particolarmente singolare in quanto è l'unico del genere su tutto il litorale pugliese e non trova riscontro in altre formazioni recenti, che pure sono presenti a Taranto, Gallipoli, S. Severo ecc. Gignoux [4]), accennando a questa formazione e tenendo presente la sua

---

[1]) E' noto che il termine *panchina* va attribuito a sedimenti detritico organogeni. Formazione analoga alla panchina tipica è il *macco* di Anzio e taluni tufi calcarei che si rinvengono lungo il litorale adriatico della Puglia.

La formazione della Punta delle Pietre Nere non ha nulla di comune con la panchina, salvo la condizione di genesi in acque calde e poco profonde: difatti, risulta costituita esclusivamente da colonie di *Cladocora caespitosa* e da conchiglie di Molluschi saldate da un cemento argilloso-sabbioso piuttosto fine.

[2]) Viola C. e Di Stefano G., *La Punta delle Pietre Nere presso il Lago di Lésina in provincia di Foggia.* Boll. Comit. geol. d'Italia, vol. XXIV. Roma, 1893.

[3]) Alle specie segnalate da Viola e Di Stefano deve essere aggiunto il genere *Parastrophia* Folin, 1869, presente in numerosi esemplari nel materiale argilloso-sabbioso che cementa le colonie di *Cladocora.* Tale genere, appartenente alla fam. *Caecidae,* è considerato caratteristico di acque calde e di esso sono note solo poche specie. Poichè gli esemplari da me ritrovati presentano caratteri notevolmente differenti da quelli delle specie note, ritengo che, salvo maggiori precisazioni a sèguito di un più approfondito esame della bibliografia, debba trattarsi di una nuova specie.

[4]) Gignoux M., *Les formations marines pliocènes et quaternaires de l'Italie du Sud et de la Sicile.* Ann. Univ. Lyon, fasc. 36. Lyon, 1913.

scarsa elevazione sul livello del mare, esclude che possa trattarsi di Siciliano; infatti anche considerando l'insieme delle specie presenti, si nota come nessuna di esse richiami l'idea di un ambiente temperato-freddo, quale normalmente si attribuisce a quel piano del Quaternario. Inoltre il Gignoux osserva che la formazione non può attribuirsi ad un livello superiore ai 15 m. Tale affermazione indurrebbe a pensare, in analogia con la facies calda della fauna presente, che possa trattarsi di Tirreniano.

Lo scarso ed insufficiente significato offerto dalla malacofauna e la mancanza di altri elementi atti a definire la posizione stratigrafica di quel deposito in facies di scogliera, mi hanno suggerito l'idea di procedere allo studio della sua microfauna: questa nel suo insieme può essere di notevole ausilio nel definire le condizioni ecologiche della zona all'epoca in cui andava formandosi la scogliera a *Cladocora*.

I foraminiferi isolati provengono dal materiale argilloso-sabbioso che cementa le colonie di coralli e le conchiglie di Molluschi. Il materiale ricavato non è abbondante, ma i pochi esemplari rappresentano numerose specie; ciò può forse avere un particolare significato proprio in relazione alle condizioni ambientali.

Fam. **Saccamminidae**

Proteonina difflugiformis (Brady)

[Brady H. B., *Notes on some of the reticularian Rhizopoda of the « Challenger » Exped.* Quart. Journ. Micr. Sci., vol. 19, p. 51, tav. 4, fig. 3 a-b. London, 1879 (*Reophax*).]

Tav. I, fig. 1.

Un solo esemplare, che risponde perfettamente alla descrizione del Brady. La specie è riportata dall'Artico al Sud Atlantico dai 7 ai 4500 m. di profondità. Nel Golfo del Messico è stata invece rinvenuta abbondante a profondità inferiore ai 50 m.

Fam. **Reophacidae**

Reophax nodulosa Brady

[Brady H. B., *Notes on some of the reticularian Rhizopoda of the Challenger Expedition.* Quart Jour. Micr. Sci., vol. 19, p. 52, tav. 4, fig. 7-8. London, 1879.]

Tav. I, fig. 2.

Un solo esemplare bene rispondente alla specie del Brady. Il genere vive di solito a notevole profondità ed è più comune nelle regioni artiche

ed antartiche che nelle zone temperate. La sua presenza nel materiale in esame apparirebbe quindi un pò contrastante con l' aspetto generale caldo e certamente costiero della fauna; d' altra parte è da notare che due specie di questo stesso genere (*R. dentaliniformis* Brady e *R. scorpiurus* Montfort) vengono riportate da Phleger e Parker per profondità anche limitate del Golfo del Messico.

Fam. **Ammodiscidae**

Ammodiscus incertus (d' Orb.)

[D' Orbigny A. D., *Foraminifères.* In Ramon De La Sagra: *Hist. phys., pol. nat. Cuba,* pag. 71, tav. 6, fig. 16-17. Paris, 1939 (*Operculina*).]

Tav. I, fig. 3.

Numerosi esemplari di questa specie. Essi presentano guscio planispirale, piccolo, finemente arenaceo, formato da 5-6 giri. Quest' ultimo carattere mi sembra possa essere messo in relazione con l' habitat: Brady riporta, infatti, che gli esemplari di notevoli dimensioni (fino a 3 mm. di diametro) e formati da 15-20 spire si rinvengono a profondità notevoli, ove, generalmente, sono abbondanti le forme arenacee.

La specie è largamente distribuita in tutti i grandi oceani, eccetto l' Artico: è riportata anche per il Mediterraneo.

Fam. **Textulariidae**

Spiroplectammina expansa Le Roy

[Le Roy L. W., *Small foram. from the Late tertiary of the Nederlands East Indies; part II. Small foram. from the Late tert. of Siberoet Island, off the West coast of Sumatra* ecc. Colorado School Mines, Quart., vol. 36, n. 1, p. 69, tav. 1, fig. 22-28. Golden, 1941.]

Tav. I, fig 4.

Ascrivo a questa specie un solo esemplare, che, salvo per il margine meno acuto, risponde bene ai caratteri ed alle illustrazioni fornite dallo Autore. La specie tipica è stata originariamente segnalata per il Miocene ed il Pliocene delle Indie Olandesi.

Textularia candeiana d' Orb.

[D' Orbigny A. D., *Foraminifères.* In Ramon De La Sagra: *Hist. phys., pol. nat. Cuba,* pag. 143, tav. 1, fig. 25-27. Paris, 1839.]

Tav. I, fig. 5.

Due soli esemplari attribuisco a questa specie. Essa fu rinvenuta sul lido di Ravenna da Fornasini; Cushman la riporta nell' Oc. Atlantico a

profondità piuttosto limitata; è stata rinvenuta sulle spiagge di Cuba, de la Martinica, di San Tomaso delle Antille e nelle acque basse dell' arcipelago Malese.

Fam. **Miliolidae**

Pyrgo lucernula (Schwager) var. **striata** Chapman

[Schwager C., *Fossile Foraminiferen vom Kar Nicobar.* Novara Exped. 1857-59. Geol. Theil., Bd. 2, p. 202, tav. 4, fig. 14-17. Wien, 1866 — Chapman F., *On the foraminifera and ostracoda from soundings (chiefly deep water) collected round Funafuti by H. M. S. Penguin.* Linn. Soc. London Jour., vol. 30, no. 202, p. 396, tav. 54, fig. 1. London, 1910.]

Tav. I, fig. 6.

Tre soli esemplari rappresentano il genere *Pyrgo*. Uno di essi presenta guscio rigonfio, ornato da strie longitudinali; l' apertura è portata da un corto collo. Questa varietà è stata rinvenuta a Funafuti alla profondità di 2200 m.

Pyrgo aff. subsphaerica (d' Orb.)

[D' Orbigny A. D., *Foraminiferès.* In Ramon De La Sagra: Hist. Phys., pol., nat. Cuba, vol. 8, p. 162, tav. 8, fig. 25-27. Paris, 1839 (*Biloculina*).]

Tav. I, fig. 7.

Gli altri due esemplari rappresentanti il genere *Pyrgo* presentano guscio levigato, subsferico, globoso, con larga apertura fornita di un dente a forma di T. Nell' insieme essi rispondono quasi bene ai caratteri della *P. subsphaerica,* tuttavia lascio dubbia la mia determinazione perchè il margine della seconda camera non mi sembra così sinuoso come nella specie di D' Orbigny, proveniente da Cuba e Giamaica.

Quinqueloculina agglutinans d' Orb.

[D' Orbigny A. D., *Foraminifères.* In Ramon De La Sagra: *Hist. phys., pol., nat. Cuba,* p. 195, tav. 12, fig 11-13. Paris. 1839.]

Tav. I, fig. 8.

Frequente. Questa specie è largamente diffusa, ma è più abbondante in acque basse e calde.

Quinqueloculina aspera d' Orb.

[D' Orbigny A.D., *Tabl. méth. de la classe des Céph.* Ann. Sc. Nat. s. 1; tome 7. p. 301. Paris, 1826.]

Tav. I, fig. 9.

Frequente.

Quinqueloculina bradyana Cush.

[Cushman J. A., *A monograph of the foraminifera of the Pacific Ocean; part VI. Miliolidae.* U. S. Nat. Mus. Bull. no 71, p. 52, tav. 18, fig. 2. Washington, 1917.]

Tav. I, fig. 10

Un solo esemplare. La specie fu istituita su materiale proveniente dalle isole Hawai alla profondità di 43 m.

Quinqueloculina candeiana d' Orb.

[D' Orbigny A. D., *Foraminifères.* In Ramon De La Sagra: *Hist. phys., pol. nat. Cuba,* p. 170, tav. 12, fig. 24-26. Paris, 1839.]

Tav. I, fig. 11-12

Poco frequente. Questa specie è stata rinvenuta in diverse località delle Indie occidentali.

Quinqueloculina costata d' Orb.

[D' Orbigny A. D., *Tabl. méth. de la classe des Céph.* Ann. Sc. Nat., vol. 7, p. 301, No 3. Paris, 1826.]

Tav. I, fig. 13.

Alcuni esemplari con la superficie ornata da numerose e fini coste. Differiscono dalla specie tipica per il collo maggiormente allungato, che presenta però labbro fialino. E' stata rinvenuta nel Golfo di Marsiglia alla profondità di 30-40 m. Cushman la riporta per le isole Tonga e Fiji da profondità molto limitate (5-22 m.).

Quinqueloculina lamarkiana d' Orb.

[D' Orbigny A. D., *Foraminifères.* In Ramon De La Sagra: *Hist. phys. pol., nat. Cuba,* pag. 189, tav. 11, fig. 14-15. Paris, 1839.]

Tav. I, fig. 14.

Pochi esemplari dal margine periferico subacuto e senza carena sono riferibili a questa specie. Essa è stata rinvenuta a pochi metri di profondità (2-11) nel Golfo del Messico e lungo le coste della California.

Quinqueloculina polygona d' Orb.

[D' Orbigny A. D., *Foraminifères.* In Ramon De La Sagra: *Hist. phys., pol., nat. Cuba,* p. 198, tav. 12, fig. 21-23. Paris, 1839.]

Pochi esemplari. La specie è largamente diffusa nelle Indie occidentali.

Quinqueloculina seminulum (L.)

[Linneo C., *Systema naturae,* ed. X, pag. 786. Holmia, 1758 (*Serpula*).]

Tav. I, fig. 15.

Pochi esemplari. La specie originaria proviene dalla spiaggia di Rimini, tuttavia è una forma che si rinviene anche in acque fredde e profonde.

Quinqueloculina subagglutinata Asano

[Asano K., *Foraminifera from Kuromatunai-mura, Suttugun, Hokkaidô.* Journ. Geol. Soc. Japan, vol. 43, n. 515, p. 620, tav. 32, fig. 1*a c.* Tôkyô, 1936.]

Tav. I, fig. 16-17.

Alcuni esemplari, che rispondono bene a questa specie. Essi presentano superficie assai grossolanamente arenacea, il che rende poco evidenti le suture. La specie, istituita per il Neogene del Giappone, non mi risulta nota allo stato vivente.

Quinqueloculina tropicalis Cush.

[Cushman J. A., *Samoan foraminifera.* Carnegie Inst. Washington, Publ. n. 342 (Dept. Marine Biol., Papers, vol. 21), pag. 63, tav. 23, fig. 9-10 Washington 1924.]

Tav. I, fig. 18.

Un solo esemplare. La specie originaria proviene dalle isole Samoa alla profondità di 25 m.

Quinqueloculina venusta (Karrer)

[Karrer F., *Die miocene Foraminiferen-Fauna von Kostej im Banat.* Sitz. K. Akad. Wiss., vol. LVIII, p. 147, tav. 2, fig. 6. Wien, 1868 (*Miliolina*).]

Tav. I, fig. 19.

Nella mia fauna ho rinvenuto pochi esemplari di questa specie, che generalmente vive in acque profonde.

Quinqueloculina columnosa Cush.

[Cushman J. A., *Shallow-water foraminifera of the Tortugas region.* Carnegie Inst. Washington, Publ. no 311, p. 65, tav. 10, fig. 10. Washington, 1922.]

Tav. I, fig. 20.

Attribuisco a questa specie, proveniente dalle adiacenze delle isole Tortugas, un solo esemplare che corrisponde bene con la figura data da Cushman. La sola differenza che mi sembra notare sta in una minore lar-

ghezza del guscio nel mio esemplare. L' habitat segnalato per la specie originale è in acque poco profonde (10 m. circa) di zone subtropicali.

Spiroloculina antillarum d' Orb.

D' Orbigny A. D., *Foraminifères*. In Ramon De La Sagra : *Hist. phys , pol., nat. Cuba,* p. 166, tav. 9, fig. 3-4. Paris, 1839.]

Tav. I, fig. 21.

Un solo esemplare di questa specie. Essa è stata rinvenuta nelle zone tropicali del Pacifico alle profondità di 750-1150 m. Phleger e Parker l' hanno riscontrata nelle Indie occidentali fra i 10 e i 50 m.

Spiroloculina tenuis (Czjzek)

[Czjzek J., *Beitrag sur Kenntniss der fossilen Foraminiferen des Wiener Beckens.* Naturw. Abh., Bd. 2, Abth. 1, p. 149, tav. 13, fig. 31-34. Wien, 1848 (*Quinqueloculina*).]

Tav. I, fig. 22.

Questa specie è rappresentata da un solo esemplare. Com' è noto, essa è largamente distribuita fino a profondità notevoli.

Triloculina bucculenta (Brady), cfr. var. **placentiformis** Brady

[Brady H. B., *Report on the foraminifera dredged by H. M. S. Challenger* ecc. Rept. Challenger Exp., Zool., vol. 9, p. 171, tav. 4, fig. 1-2. London, 1884 (*Miliolina*).]

Tav. I, fig. 23.

Ascrivo dubitativamente a questa varietà della *Triloculina bucculenta* un solo esemplare di notevoli dimensioni (1 mm.), che presenta un aspetto circolare, un po' compresso ed asimmetrico e superficie irregolare. L' incompletezza di quest' unico esemplare, che manca del dente, non mi permette un confronto più accurato.

Triloculina circularis Bornemann

[Bornemann J. G., *Die mikroskopische Fauna des Septarienthones von Hermsdorf bei Berlin.* Deutsch. Geol. Ges. Zeitschr., Bd. 7, p. 349, tav. 19, fig. 4. Berlin, 1855.]

Tav. I, fig. 24.

Specie frequente. Essa è segnalata da Natland come abbondante a profondità inferiore ai 40 m. in zone tropicali. Cushman la riporta per le acque basse delle lagune interne di alcuni atolli dell' Oc. Pacifico.

Triloculina nasuta Cush.

[Cushman J. A., *Fourteen new species of foraminifera.* Smith. Inst. Misc. Coll., vol. 91, n. 21, p. 5, tav. 2, fig. 1-3. Washington, 1935.]

Tav. I, fig. 25.

Un solo esemplare, che ascrivo, per i suoi caratteri ben evidenti, alla specie di CUSHMAN proveniente da una zona a Nord di Portorico alla profondità di 55-75 m. Si tratta, quindi, di specie di ambiente tropicale. Non mi risulta segnalata in altre località.

Triloculina oblonga (Montagu)

[MONTAGU G., *Testacea Britannica or nat. hist. of British shells* ecc., p. 522, tav. 14, fig. 9. Romsey, 1803 (*Vermiculum*)]

Tav. I, fig. 26.

Numerosi esemplari appartengono a questa specie. Quelli da me considerati presentano un dente sottile come le forme riportate da CUSHMAN nella collezione del Sud Pacifico. La specie è abbondante a profondità limitata in acque tropicali.

Triloculina trigonula (Lmk.)

[LAMARCK J. B. P. A, *Coq. foss.* Paris. Ann. du Muséum, vol. V, p. 351, N. 3. Paris, 1804 (*Miliolites*).]

Tav. I, fig. 27.

Questa specie è la più frequente fra le diverse Miliolidi presenti nella mia fauna. I numerosi esemplari isolati rispondono perfettamente ai caratteri della specie tipica. E' citata da CUSHMAN a profondità assai limitate in diverse zone tropicali del Pacifico.

Fam. **Ophthalmidiidae**

Cornuspira selseyensis Heron-Allen e Earland

[HERON-ALLEN E., e EARLAND A., *On the recent and fossil Foram. of the shore-sands at Selsey Bill, Sussex*; part II. Roy. Micr. Soc. London Journal, p. 319, tav. 15, fig. 9-11. London, 1909.]

Tav. II, fig. 35.

Un solo esemplare che mostra evidentemente i caratteri della specie istituita su materiale proveniente da zone costiere del Sussex.

Fam. **Lagenidae**

Robulus occidentalis (Cush.) var. **torrida** Cush.

[CUSHMAN J. A., *The Foramifera of the Atlantic Ocean, part 4. Lagenidae*, pag. 105, tav. 25, fig. 1. Washington, 1923 (*Cristellaria*).]

Tav. I, fig. 28.

Un solo esemplare che presenta, come la specie tipica, guscio traslu-

cido, carena sottile e trasparente, poche camere, l'ultima delle quali si protende in avanti.

Questa varietà proviene dalle zone temperate dell'Atlantico, dalla profondità di m. 100-1525.

Dentalina neugeboreni (Schwager)

[Schwager C., *Fossile Foram. vom Kar Nicobar.* Novara Exped. 1857-59. Geol. Theil., Bd. 2, p. 236, tav. 6, fig. 67. Wien, 1866 (*Nodosaria*).]

Tav. I, fig. 29.

Specie rara. Ne ho rinvenuto un solo esemplare formato da 5 camere, l'ultima delle quali è notevolmente più rigonfia e porta nell'angolo periferico terminale l'apertura raggiata. La specie è stata rinvenuta in 6 stazioni dell'« *Albatross* », ma sempre a profondità notevole (500-4500 m.)

Lagena exagona (Williamson)

[Williamson W. C., *On the recent British species of the genus Lagena.* Ann. Mag. Nat. Hist., s. 2, vol. 1, p. 20, tav. 2, fig. 23. London, 1948 (*Entosolenia*).]

Rarissima. L'esemplare rinvenuto presenta un reticolo molto rilevato, formato da maglie esagonali grandi. La specie vive generalmente a tutte le profondità, ma preferisce acque temperate fredde.

Lagena castrensis Schwager

[Schwager C., *Foss. Foram. von Kar Nicobar.* Novara Exped., Geol. Theil, vol 2, p. 208, tav. 5, fig. 22. Vienna, 1866.]

Un solo esemplare. La specie è riportata da Brady dai 27-2000 m.

Lagena marginata (Walker e Boys)

[Walker G. e Boys W., *Testacea minuta rariora* ecc., p. 2, tav. 1, fig. 7. London, 1784 (*Serpula*).]

Rara. Questa specie risulta vivente nei mari attuali dalla zona costiera fino ad oltre 5000 m.

Glandulina laevigata d'Orb.

[D'Orbigny A. D., *Tabl. méth. de la Classe des Céph.* Ann. Sc. Nat, s. 1, tome 7, pag. 252, tav. 10, fig. 1-3. Paris, 1826.]

Rara. Largamente diffusa a tutte le profondità.

Glandulina radicula (L.)

[Linneo C., *Syst. Nat.*, ed. 13, vol. 1, pt. 6, p. 3373, No 18. Leipzig, 1788 (*Nautilus*).]

Tav. I, fig. 30.

Rara. Questa specie è largamente distribuita e si rinviene a tutte le profondità.

Fam. **Polymorphinidae**

Polymorphina concava Will.

[Williamson. W. C., *On the Recent foram. of Great Brit.* Ray Soc., p. 72, tav. 6, fig. 151-152. London 1858.]

Tav. I, fig. 31.

Attribuisco a questa specie un solo esemplare, che presenta il guscio circondato da una sottile espansione marginale; esso è perfettamente rispondente alle figure date da Williamson per la var. *concava* della *P. lactea*. La specie risulta vivente presso le Isole Britanniche e nel Mediterraneo.

Polymorphina lactea (Walker e Jacob)

var. novangliae Cush.

Walker G. e Jacob E., in Kanmacher F., *Adams Essay on the microscope*, p. 634, tav. 24, fig. 4. London, 1798 (*Serpula*). — Cushman J. A., *The foram. of the Atlantic Ocean, part 4. Lagenidae*, p. 146, tav. 39, fig. 6-8. Washington, 1923.]

Attribuisco a questa specie due piccoli esemplari dal guscio allungato, fusiforme, con apertura raggiata restringentesi all'estremità. Risulta presente nelle regioni temperate del Nord Atlantico a profondità superiore ai 2500 m. e nel Golfo di S. Lorenzo a 40-50 m.

Pseudopolymorphina sp.

Tav. I, fig. 32.

Posseggo un solo esemplare, che, per la disposizione biseriale delle camere, che si sovrappongono leggermente le une alle altre, e per l'apertura terminale raggiata, mi sembra possa attribuirsi al genere sopraindicato. Il mio esemplare non è identificabile con nessuna delle specie note; tuttavia, per l'insufficienza del materiale, non mi sembra opportuno per ora farne una nuova specie.

Fam. **Nonionidae**

Nonion granosum (d' Orb.)

[D' Orbigny A. D., *Tabl. méth. Céph.* Ann. Sc. Nat., s. 1, tome 7, p. 294, No. 8. Paris, 1826 (*Nonionina*).]

Tav. I, fig. 33.

Guscio molto involuto ed un pò compresso; regione ombelicale larga riempita da bozzi di varie dimensioni, quelli centrali sono più sviluppati; suture distinte; camere rigonfie, 9 nell' ultimo giro. La specie risulta presente dall' Oligocene in poi. Fu rinvenuta da Fornasini nell' Adriatico.

Nonion pompilioides (Fichtel e Moll)

[Fichtel e Moll J. P. C., *Testacea micr. aliaque minuta gen. Argonauta et Nautilus*, p. 31, tav. 2, fig. a-c. Wien, 1798 (*Nautilus*).]

Tav. I, fig. 34.

Un solo esemplare. La specie è segnalata nell' Oc. Atlantico dai 100 ai 4600 m.; nel Golfo del Messico a 38 m.

Nonionella opima Cush.

[Cushman J. A., *New species and varieties of foram. from of the southeastern coast of the U. S.* Cush. Lab. Foram. Res. Contr., vol. 23, p. 90, tav. 20, fig. 1-3. Sharon, Mass. 1947.]

Un solo esemplare del gen. *Nonionella*, che ci sembra risponda bene alla *N. opima* Cush. La specie tipica proviene dalla Florida; è stata rinvenuta anche nel Golfo del Messico dai 18 ai 152 m.

Elphidium crispum (L.)

[Linneo C., *Syst. nat.*, ed. 10, p. 709. Holmia, 1758 (*Nautilus*).]

Tav. II, fig. 1.

Frequente e di notevoli dimensioni. La specie è largamente distribuita a tutte le profondità.

Elphidium lidoense Cush.

[Cushman J. A., *Some new species of Elphidium and related genera.* Contr. Cush. Lab. Foram. Res., vol. 12, p. 86, tav. 15, fig. 6. Sharon, Mass., 1936.]

Tav. I, fig. 35.

Frequente. La specie tipica proviene dal Lido di Venezia.

Elphidium macellum (Fichtel e Moll)

[Fichtel L. e Moll J. P. C., *Testacea microscopica* ecc., p. 66, tav. 10, fig. h-k. Wien, 1798 (*Nautilus*).]

Tav. II, fig. 2.

Specie frequente e rappresentata da individui bene sviluppati. E' largamente diffusa, ma non raggiunge grandi profondità.

Elphidium nigarense Cush.

[Cushman J. A., *Some new species of Elphidium and related genera.* Contr. Cush. Lab. Foram. Res., vol. 12, pt. 4, p. 85, tav. 15, fig. 3. Sharon, Mass. 1936.]

Tav. II, fig. 3.

Alcuni esemplari, che rispondono pienamente alla specie tipica dragata a Nigara (Grecia).

Fam. **Buliminidae**

Bulimina fusiformis Will. var. **pupoides** Forn.

[Williamson W. C. *On the recent Foram. of Great Britain,* pag. 63, tav. 5, fig. 129-130 London. 1858. — Fornasini C., *Contributo alla conoscenze de le Bulimine adriatiche.* Mem. Acc. Sc. Ist. Bologna, pag. 10, tav. 0, fig. 13-17. Bologna, 1901.]

Tav. II, fig. 7.

Posseggo un solo esemplare, i cui caratteri si avvicinano notevolmente alla varietà di Fornasini ; ne differisce tuttavia per le camere meno rigonfie e le suture meno profonde. Pertanto, non disponendo di materiale sufficiente per istituire una specie nuova, ne dò l'attribuzione sopra indicata, essendo quella la forma più vicina.

Bulimina gibba Fornasini

[Fornasini C., *Contributo alla conoscenza de le Bulimine adriatiche.* Mem. Accad. Sc. Ist. Bologna, s. V, tomo 9, p. 378, tav. 0, fig. 32-34. Bologna, 1901-1902.]

Tav. II, fig. 4.

Poco frequente. La specie tipica proviene dall'Adriatico ; è stata anche rinvenuta nel Mediterraneo, presso l'Irlanda, l'isola Juan Fernandez e lungo le coste del Chile.

Bulimina inflata Seguenza

[Seguenza G., *Prime ricerche intorno ai Rizopodi fossili delle argille pleistoceniche dei dintorni di Catania.* Atti Acc. Gioenia Sc. Nat., serie 2, vol. XVIII, p. 107, tav. 1 fig. 10. Catania, 1862.]

Tav. II, fig. 5.

Poco frequente. La specie tipica proviene dal pleistocene di Catania.

Bulimina marginata d' Orb.

[D' Orbigny A. D., *Tabl. méth. Céph.*, Ann. Sc. Nat., vol. 7, p. 269, n. 4, tav. 12, fig. 10 12. Paris, 1826.]

Tav. II, fig. 6.

Fra le varie specie di Bulimine presenti nella fauna, la *B. marginata* è la più abbondante. La specie è largamente distribuita a tutte le profondità. Per le coste occidentali dell' America Centrale e per quelle della California meridionale è riportata dai 10 ai 275 m.

Bulimina ovata d' Orb.

[D' Orbigny A. D., *Foram. foss. du bassin tert. Vienne (Autriche)*, p. 185, tav. 11, fig. 13-14. Paris, 1846.]

Un solo esemplare. E' largamente distribuita da 25 a 3500 m.

Bulimina striata d' Orb.

[D' Orbigny A. D. *Tabl. méth. des Céph.* Ann. Sc. Nat., vol. 7, p. 269, n. 2. Paris, 1826.]

Tav. II, fig. 8.

Rara. La specie tipica proviene dalle spiaggie di Rimini.

Virgulina complanata Egger

[Egger J. G, *Foram. aus Meeresgrundproben* ecc. Abhand. Kön. Bay Akad. Wiss., Cl. II, vol. 18, p. 292, tav. 8, fig. 91-92. München, 1893.]

Tav. II, fig. 9.

Rara. Nel Mediterraneo questa specie compare con l' inizio del Quaternario. Vive fino a 4000 m.; nel Golfo del Messico è riportata da 33 a 58 m.

Virgulina compressa (Bailey)

[Bailey J. W., *Microscopical examination of Soudings made by the U. S. Coast* ecc. Smith. Contr, vol. 2, art. 3, p. 12, tav. 12, fig. 35-37. Washington, 1851.]

Rara. Distribuita nell' Atlantico dai 90 ai 2900 m.

Bolivina catanensis Seguenza

[Seguenza G., *Prime ricerche intorno ai Rizopodi* ecc. Atti Acc. Gioenia Sc. Nat., s. 2, vol. 18, p. 29, tav. 2, fig. 3, 3a, 3b. Catania, 1862.]

Tav. II, fig. 10.

Poco frequente. La specie è largamente diffusa nel Mediterraneo.

Bolivina plicatella Cush.

[Cushman J. A., *The foram. of the Choctwhatchee formation of Florida.* Florida State Geol. Surv., Bull., n. 4, p. 46, tav. 8, fig. 10. Tallahassee, Fla. U. S. A., 1930.]

Tav. II, fig. 11.

Attribuisco a questa specie alcuni esemplari, i quali rispondono bene a quello rappresentato da Cushman con la fig. 3 nella tav. 11 della *Monograph of the foram. subfam. Virgulininae*, proveniente dal Miocene della Florida. Con questo esemplare il mio materiale mostra oltre l'identità della disposizione delle camere e dell'andamento delle suture, anche analogo rapporto di dimensioni in relazione alla forma più slanciata rispetto all'olotipo.

Bolivina spathulata (Will.)

[Williamson W. C, *On the Recent Foraminifera of Great Britain*, p. 76, tav. 6, fig. 164-165. London, 1858 (*Textularia*).]

Tav. II, fig. 12.

Rara. E' una specie largamente diffusa.

Bolivina subexcavata Cush. e Wickenden

[Cushman J. A. e Wickenden R. T. D., *Recent Foram. from off Juan Fernandez Islands.* U. S. Nat. Mus., Proc., n. 2780, vol. 75, art. 9, p. 9, tav. 4, fig. 4a-b. Washington, 1929.]

Tav. II, fig. 13.

Rara. La specie tipica proviene dall'isola Juan Fernandez dalla profondità di 20-40 m.

Loxostomum limbatum (Brady)

[Brady H. B., *Notes on some of the Recutilarian Rhizopoda of the Challenger Exped.* Part. III. Quart. Journ. Microsc. Sc., vol. XXI, n. s., p. 57. London, 1881 (*Bolivina*).]

Tav. II, fig. 14.

Questa specie è rappresentata da alcuni esemplari che ne mostrano chiaramente i caratteri. Molto bene evidenti e caratteristiche sono le suture sinuose e limbate. Brady ritiene questa forma caratteristica di acque basse nei mari tropicali; compare inoltre nelle scogliere coralline dell'Australia (25-30 m).

Reussella spinulosa (Reuss)

Reuss A. E. *Neue Foram. aus den Schichten* ecc. Denkschr math.-nat. Cl. Akad. Wiss, vol. 1, p. 347, tav. 57, fig. 1 '. Vienna, 1849 (*Verneulina*).]

Rara. Secondo Brady questa specie è tipica delle acque tropicali e subtropicali poco profonde, pur avendo una larga distribuzione areale e verticale (20-4000 m.)

Uvigerina ampullacea Brady

[Brady H. B., *Rep. on the foram dredged by Challenger, Zoology*, vol. 9, p. 579, tav. 75, fig. 10-11, London, 1884.]

Un solo esemplare. La specie è largamente diffusa nell' Atlantico e nel Pacifico tropicale, ma vive generalmente a profondità notevole.

Uvigerina peregrina Cush.

[Cushman J. A., *The foram. of the Atlantic Oc.; part 4-Lagenidae*. U. S. Nat. Mus., Bull., n. 104, p. 166, tav. 42, fig. 7-10. Washington, 1923.]

Tav. II, fig. 15.

Poco frequente. E' una specie molto diffusa nell' Atlantico dai 30 ai 4300 m. Gli esemplari presenti nella mia fauna sono generalmente piccoli.

Uvigerina pygmaea d' Orb.

[D' Orbigny A. D., *Tabl méth. Céph.* Ann. Sc. Nat., s. 1, t. 7, p. 269, tav. 12, fig. 8-9. Paris, 1826.]

Tav. II, fig. 16.

Rara. E' una specie a larga diffusione, che si spinge fino ai 4000 m.

Uvigerina tenuistriata Reuss var. **gaudrynoides** Lipparini

[Reuss A. E., *Die Foram. des Septarienthones von Pietzpuhl* K. Akad. Wiss. Wien, Math. Nat. Cl., Sitzber., Ed. 62, Abt. 1, p. 485. Wien, 1870. — Lipparini T., *Foramin. delle Marne azzurre a Orbitolites e Hydrobia del Miocene presso Bologna*. Gior. Geologia, s. 2, vol. 7 p. 65, tav. 6, fig 7-8. Bologna, 1932.]

Tav. II, fig. 17.

Questa varietà, di cui posseggo un solo esemplare, mi risulta sia stata trovata solo nel Messiniano della Valle Padana. Dalla bibliografia consultata non sembra presente nei mari attuali.

Siphonodosaria consobrina (d' Orb.) var. **emaciata** Reuss

[D' Orbigny A. D., *Foram foss. bassin tert. Vienne*, pag. 46, tav. 2, fig. 1-3. Paris, 1846 (Dentalina). — Reuss A. E., *Ueber die foss. Foraminif. und Ent. der Septar.* ecc. Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesell., vol. 3, pag. 63, tav. 3, fig. 9. Berlin, 1851.]

Tav. II, fig. 18.

Rara. Ne posseggo un esemplare incompleto, mancante della porzione terminale. Nell' Atlantico questa varietà è stata rinvenuta dai 75 ai 770 m. di profondità.

Siphonodosaria fistuca (Schwager)

[Schwager C., *Fossile Foraminiferen von Kar Nikobar.* Novara Exp. 1837-39, Geol. Theil, Bd. 2, Abt. 2, p. 216, tav. 5, figg. 36-37. Wien. 1866 (Nodosaria).]

Tav. II, fig. 21.

Un solo ed incompleto esemplare.

Siphonodosaria monilis (Silv.)

[Silvestri O., *Saggio di studi sulla fauna microsc. foss. appartenente al terreno subapennino ital.; Mem. I Monogr. Nodosarie.* Atti Acc. Gioenia Sc. Nat. Catania, s. 3, t. 7, p. 71, tav. 8, fig. 173-183. Catania, 1872 (*Nodosaria*).]

Tav. II, fig. 19.

Rara. Vivente.

Siphonodosaria monilis (Silv.) **var. laevigata** Silv.

[Silvestri O., *Saggio di studi sulla fauna* ecc. Atti Acc. Gioenia, s. 3 t. 7, p. 74-75, tav. 8, fig. 184-190. Catania 1872.]

Tav. II, fig. 20.

Rara. Vivente.

Angulogerina carinata Cush. **aff. var. bradyana** Cush.

[Cushman J. A., *Recent foram. off the West Coast of America.* California Univ. Scripps. Inst. Ocean. Bull., Tech. Ser., vol. 1; n. 10, p. 159, tav. 4, fig. 3. Berkeley, 1927. — Cushman J. A., *Some recent Angulogerinas from the eastern Pacific.* Contr. Cush Lab. Foram. Res., vol. 8, pt. 2, n. 121, p. 45, tav. 6, fig. 9-10. Sharon, Mass., 1932.]

Un solo esemplare, che per la presenza delle carene e per la forma delle camere più rigonfie nella porzione centrale del guscio si presenta molto simile alla figura data da Cushman dell' olotipo. Peraltro noto, che nel mio esemplare non sono ben visibili le costolature delle prime camere.

Trifarina bradyi Cush.

[Cushman J. A., *The Foraminifera of the Atlantic Ocean; Part 4. Lagenidae.* U. S. Nat. Mus., Bull. n. 104, p. 99, tav. 22, fig. 3-9. Washington, 1923.]

Tav. II, fig. 22.

Rara. Vivente, si ritrova alle medie latitudini da 102 a 2480 m.

Fam. **Rotalidae**

Discorbis australis Parr

[Parr W. J., *Victorian and south Australian shallow-water foraminifera, P. II.* Proc. Roy. Soc. Victoria, vol 44 (n. s.) p. 227, tav. 22, fig. 31. Melbourne, 1932.]

Tav. II, fig. 23.

Nella mia fauna sono presenti molti esemplari appartenenti alle *Discorbis* appresso descritte. La specie *D. australis* è la meno frequente. La forma tipica è stata rinvenuta lungo le coste sabbiose dell' Australia.

Discorbis concinna (Brady)

[Brady H. B., *Report on the foram. dredged by H. M. S. Challenger ecc.* Rep. Chall. Exped., Zool. vol. IX, p. 646, tav. 90, fig. 7-8. London, 1884 (*Discorbina*).]

Tav. II, fig. 24.

Frequente. La specie vive dai 27 ai 1133 m.

Discorbis globularis (d' Orb.)

[D' Orbigny A. D., *Tabl. méth. des Céph.* Ann. Sc. Nat., s. I, vol. VII, p. 271, tav. 13, fig. 1-4. Paris, 1826 (*Rosalina*).]

Tav. II, fig. 25.

Abbondante e di grandi dimensioni. Questa specie appare frequentemente nelle acque poco profonde dei mari temperati subtropicali. Frequente soprattutto a profondità non superiore ai 90 m., pare non si estenda oltre i 1000 m. (Brady, Cushman).

Discorbis orbicularis (Terquem)

[Terquem O., *Essai sur le classement des animaux* ecc. fasc. 2. Mém. Soc. Dunkerq., vol. 20, pag. 166, tav. 9, fig. 4. Dunkerque, 1877 (*Rosalina*).]

Frequente. Secondo Brady, questa specie è ben nota come caratteristica delle formazioni coralline; è largamente diffusa ma non oltrepassa i 750 m. di profondità.

Valvulineria bradyana (Fornasini)

[Fornasini C., *Intorno ad alcuni esemplari di foraminiferi adriatici.* Mem. Accad. Sc. Ist. Bologna, s. 5, t. VIII. Bologna, 1900 (*Discorbina*).]

Tav. II, fig. 26.

Rara.

Eponides praecinctus (Karrer)

[Karrer F., *Die Miocene Foram von Kostej in Banat.* Sitz. K. Akad. Wiss. Wien, vol. LVIII, p. 189, tav. 5, fig. 7. Wien, 1868 (*Rotalia*).]

Pochi esemplari. La specie è comune nelle scogliere coralline delle zone tropicali dei vari oceani ed anche nel Pacifico meridionale da 27 a 460 m; nel Mar Rosso è stata rinvenuta alla profondità di m. 55.

Eponides praecinctus (Karrer) var. ornatus Silv.

[Silvestri A., *Foraminiferi pliocenici della prov. di Siena, p. II.* Mem. Accad. Pont. Nuovi Lincei, vol. 15, p. 299, tav. VI, fig. 10. Roma, 1898 (*Truncatulina*).]

Ta . II, fig. 27.

Un solo esemplare, che ascrivo alla varietà di Silvestri per la forma quasi ugualmente biconvessa e per la presenza dell'ombelico. La specie tipica è diffusa nelle scogliere coralline delle zone tropicali e sembra non spingersi oltre 470 m.

Eponides punctulatus (d'Orb.)

[D'Orbigny A., *Tabl. méth. des Céph.* Ann. Sc. Nat., ser. I, tome VII, p. 273, N. 25, mod. n. 12. Paris, 1826 (*Rotalia*).]

Poco frequente. Questa specie sembra localizzata nell'Atlantico settentrionale; nel Mediterraneo e nell'Adriatico fino a profondità non superiore a 650 m.

Rotalia beccarii (L.)

[Linneo C., *Syst. Nat.*, ed. 13, p. 3370, N. 4. Leipzig, 1788 (*Nautilus*).]

Tav. II, fig. 28.

Frequente e rappresentata da individui bene sviluppati. La specie, com'è noto, è largamente diffusa.

Fam. **Cassidulinidae**

Cassidulina laevigata d'Orb.

[D'Orbigny A. D., *Tabl. méth. des Céph.* Ann. Sc. Nat., s. I, t. 7, p. 282, tav. 15, fig. 4-5. Paris, 1826.]

Frequente. Questa specie è largamente diffusa nell'Atlantico, dalla costa fino a 2790 m. Mel Mediterraneo e nell'Adriatico vive a profondità limitata.

Cassidulina laevigata d' Orb. var. **carinata** Silv.

[Silvestri A., *Foram. plioc. della prov. di Siena ; parte I.* Mem. Pont. Accad. Lincei, vol. 12, p. 104, tav. 2, fig. 10. Roma, 1896]

Ascrivo a questa varietà di Silvestri (1896), non Cushman (1922), pochi esemplari forniti di caratteristica carena. Attualmente vive nell' Atlantico da m. 102 a 1675, mentre nel Mediterraneo risale anche a minore profondità.

Cassidulina subglobosa Brady

[Brady H. B., *Notes on some of the Reticularian Rhizopoda of the Challenger Exp., p. III.* Quart. Journ. Microsc. Sc., n. s., vol. XXI, p. 60. London, 1881.]

Rara. E' generalmente una specie di mare profondo, presente in tutti gli oceani, ma si ritrova anche a profondità limitata.

Fam. **Chilostomellidae**

Sphaeroidina bulloides d' Orb.

[D' Orbigny A. D., *Tabl. méth. des Céph.* Ann. Sc. Nat, vol. VII, p. 267, n. 1. mod. 65. Paris, 1826.]

Tav. II, fig. 29.

Frequente. E' specie largamente distribuita sia in senso areale che in quello batimetrico (75-4500 m.).

Fam. **Globigerinidae**

Globigerina bulloides d' Orb.

[D' Orbigny A. D., *Tabl. méth. des Céph.* Ann. Sc. Nat., vol. 7, p 277, n. 1 Paris, 1826.]

Tav. II, fig. 30.

Frequente. Vivente.

Globigerina concinna Reuss

[Reuss A E., *Neue Foram. aus den Schichten des Österr. Tertiärbeckens.* K. Akad. Wiss. Wien, Math-Nat. Cl, Denkschr., Bd. 1, p. 379, tav. 47, fig. 8-8*a*. Wien, 1950.]

Rara. Vivente.

Globigerina pachiderma Ehremberg

[Ehremberg C. G., *Ueber Tiefgrund Verhältnisse des Oceans am Eingang der Davisstrasse und bei Island.* K. preuss. Ak. Wiss., p. 303. Berlin. 1872]

Rara. Vivente.

Globigerinoides conglobatus (Brady)

[Brady H. B., *Notes on some of the reticularian Rhizopoda of the « Challenger » Exp.* Quart. Journ. Micr. Sci., vol. 19, p. 72. London, 1879 (*Globigerina*)]

Rara. Vivente.

Globigerinoides trilobus (Reuss)

[Reuss A. E., *Neue Foraminiferen aus den Schichten des Österreich Tertiärbeck.* Denksch. d. math.-natur. Kl. d. k. Akad. Wiss. Wien, vol. I, p. 374, tav. 47, fig. 11*a-e*. Wien, 1849 (*Globigerina*).]

Tav. II, fig. 31.

Frequente. Vivente.

Orbulina universa d' Orb.

[D' Orbigny A., *Foraminifères.* In : Ramon de la Sagra : Hist. phys , pol., nat. Cuba, pag. 3, tav. 1, fig. 1. Paris, 1839.]

Frequente. Vivente.

Fam. **Globorotaliidae**

Globorotalia menardii (d' Orb.)

[D' Orbigny A., *Tabl. méth. de la classe des Céphal.* Ann. Sc. Nat., vol. 7 p. 273, N. 26, Mod. n. 10. Paris, 1826 (*Rotalia*).]

Tav. II, fig. 32.

Pelagica, vivente, largamente distribuita in tutti i mari temperati e caldi.

Fam. **Anomalinidae**

Anomalina balthica (Schroeter)

[Schroeter J. S. *Einleitung in die Conchylienkenntniss nach Linnè,* vol. 1, p. 20, tav. 1, fig. 2. Halle, 1783-1786 (*Nautilus*).]

Un solo esemplare, molto piccolo e con pareti sottili. Questa specie, comparsa nel Mediterraneo all' inizio del Calabriano, denota, quando frequente, un ambiente piuttosto freddo. E' noto peraltro che in taluni casi ha subìto un processo di adattamento anche in acque temperate calde (ad es. « Ammontatura » nel Golfo di Napoli).

Cibicides boueanus (d' Orb.)

[D' Orbigny A. D., *Foram. foss. bassin tert. Vienne,* p. 169, tav 9, fig. 24-26. Paris, 1846 (*Truncatulina*)]

Rara. Vivente.

Cibicides lobatulus (Walker e Jacob)

[Walker G. e Jacob E., In Kanmacher F., *Adams Essay on the microscope*, 22 ed., p. 642, tab. 14, fig. 36. London, 1798 (*Nautilus*).]

Rara. E' comune a tutte le latitudini; pur raggiungendo la profondità di oltre 500 m. è abbondante nelle zone litorali ed in quelle coralline.

Fam. **Planorbulinidae**

Acervulina inhaerens Schultze

[Schultze M. S., *Ueber der Org. der Polythal. Foram.*, p. 68, tav. 6, fig. 12. Leipzig, 1854.]

Tav. II, fig. 33.

Un solo esemplare di questa specie che di solito è frequente in acque poco profonde (m. 10-70).

Fam. **Rupertiidae**

Carpenteria utricularis Carter

[Carter H. J., *On the Polytremata* (*Foraminifera*) ecc. Ann. and Mag. Nat. Hist, s. 4, vol. XVII, pag. 211, tav. 13, fig. 11-17. London, 1876.]

Tav. II, fig. 34.

Qualche esemplare di questa specie che generalmente caratterizza acque calde e poco profonde, spingendosi raramente fino a 500 m.

Significato della microfauna.

La microfauna sopra descritta risulta costituita da 93 specie, distribuite in 18 famiglie e 41 generi. Si tratta quindi di una associazione assai varia, nella quale sono rappresentati i generi più disparati e meno consueti, che potranno forse aiutarci nel definire le condizioni nelle quali ebbe a vivere tale microfauna.

Anzitutto è da notare la estrema scarsezza di individui planctonici, concordemente alle condizioni di vita della scogliera corallina, che si andava formando certamente a profondità limitata e su di una costa aperta. Infatti lungo questa non poteva certo avvenire l'accumulo di specie planctoniche, come invece si ha per le zone più profonde o per quei seni marini, nei quali la loro sedimentazione ha luogo per il gioco delle correnti.

Un elemento molto significativo per una esatta valutazione delle con-

dizioni ecologiche è fornito dalla abbondanza delle Miliolidi, rappresentate principalmente dal genere *Quinqueloculina* (12 specie) e da *Triloculina* (5 specie) ed in via assai subordinata da *Spiroloculina* e *Pyrgo*. I rappresentanti di questa famiglia parlerebbero quindi in favore di un clima temperato caldo, essendo assai scarse le *Pyrgo*, che di solito indicano acque fredde o profonde. Ad avvalorare una tale prima deduzione si aggiunga la presenza delle seguenti specie: *Eponides praecinctus* tipica e della sua varietà *ornatus*, che, secondo Brady caratterizzano le scogliere coralline delle zone tropicali, pur spingendosi, peraltro, fino a circa 500 m.; *Discorbis globularis*; *Carpenteria utricularis*, la quale sembra spiccatamente caratteristica delle acque tropicali poco profonde; *Loxostomum limbatum*, il cui habitat, secondo Brady, è pure in acque basse tropicali.

Accanto a queste specie, che nel loro insieme tenderebbero a dimostrare un ambiente analogo a quello nel quale attualmente si sviluppano le scogliere coralline, la mia microfauna presenta un notevole numero di altre specie, scarsamente significative, perchè a distribuzione areale e batimetrica assai ampia. Peraltro nessuna forma caratterizza un habitat spiccatamente freddo, non potendosi interpretare in tal senso l'unico esemplare di *Anomalina balthica*, nè i rari esemplari di *Cassidulina laevigata* var. *carinata* e neppure la *Virgulina complanata*. Ciò anche in considerazione della riscontrata adattabilità delle forme originariamente fredde in un habitat attuale di clima temperato (ad es. l'*Anomalina balthica* nel Golfo di Napoli a 150 m.).

Come già accennato nella introduzione, la malacofauna segnalata da Viola e Di Stefano non è tale da fornire elementi sicuri per un'attribuzione al Tirreniano, mancandovi il caratteristico *Strombus bubonius* Lmk Pur tuttavia la frequenza di cospicui esemplari di *Spondylus gaederopus* e del gen. *Parastrophia*, da me segnalato nella formazione per la prima volta, sono elementi che confermano l'idea di un ambiente litorale e caldo [1]).

Pertanto, se da un lato — pur con le necessarie riserve e in attesa di condurre ulteriori ricerche nella zona — la formazione a *Cladocora* della Punta delle Pietre Nere può rientrare tuttora — allo stato attuale delle nostre conoscenze — nel Tirreniano, com'era comunemente ammesso dai precedenti Autori, dall'altra parte, tenuto conto della sua scarsa elevazione sul livello marino attuale, e considerando il fatto che in altre località della Puglia i sedimenti di quest'orizzonte tirreniano si trovano di

[1]) Anche Blanc è del parere che la panchina delle Pietre Nere possa attribuirsi. per la presenza di *Spondylus gaederopus*, al Tirreniano (Blanc A. C., *Variazioni climatiche ed oscillazioni della linea di riva nel Mediterraneo centrale durante l'Era glaciale*. Geologie der Meere und Binnengewässer, Bd. 5, Heft 2, s. 137-219. 1942)

solito ad altezza alquanto maggiore, non è da escludere che la fauna da me studiata possa essere messa in relazione con la successiva trasgressione versiliana. Una indiretta conferma di tale ravvicinamento potrebbe trovarsi nella presenza del genere *Parastrophia*, finora appena segnalato sopra scarsi avanzi (non determinati specificamente) nei depositi della pianura della bassa Versilia. (Blanc A. C., Settepassi F. e Tongiorgi E., *Excursion au Lac de Massaciuccoli*. IV Congr. Intern. Quaternaire. Pisa, 1953).

Napoli, Istituto geo-paleontologico dell' Università. Maggio, 1954.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

TAVOLA I

Fig. 1. — *Proteonina difflungiformis* (Brady)
» 2. — *Reophax nodulosa* Brady
» 3. — *Ammodiscus incertus* (d'Orb.)
» 4. — *Spiroplectammina expansa* Le Roy
» 5. — *Textularia candeiana* d'Orb.
» 6. — *Pyrgo lucernula* Schwager var. *striata* Chapman
» 7. — » aff. *subsphaerica* (d'Orb.)
» 8. — *Quinqueloculina agglutinans* d'Orb.
» 9. — » *aspera* d'Orb.
» 10. — » *bradyana* Cush.
» 11-12 » *candeiana* d'Orb.
» 13. — » *costata* d'Orb.
» 14. — » *lamarkiana* d'Orb.
» 15. — » *seminulum* (L.)
» 16-17 » *subagglutinata* Asano
» 18. — » *tropicalis* Cush.
» 19. — » *venusta* (Karrer)
» 20. — » *columnosa* Cush.
» 21. — *Spiroloculina antillarum* d'Orb.
» 22. — » *tenuis* (Czjzek)
» 23. — *Triloculina bucculenta* (Brady) cfr. var. *placentiformis* Brady
» 24. — » *circularis* Bornemann
» 25. — » *nasuta* Cush.
» 26. — » *oblonga* (Montagu)
» 27. — » *trigonula* (Lmk.)
» 28. — *Robulus occidentalis* (Cush.) var. *torrida* Cush.
» 29. — *Dentalina neugeboreni* (Schwager)
» 30. — *Glandulina radicula* (L.)
» 31. — *Polymorphina concava* Will.
» 32. — *Polymorphina* sp.
» 33. — *Nonion granosum* (d'Orb.)
» 34. — *Nonion pompilioides* (Fichtel e Moll)
» 35. — *Elphidium lidoense* Cush.

Tutte le figure sono × 45.

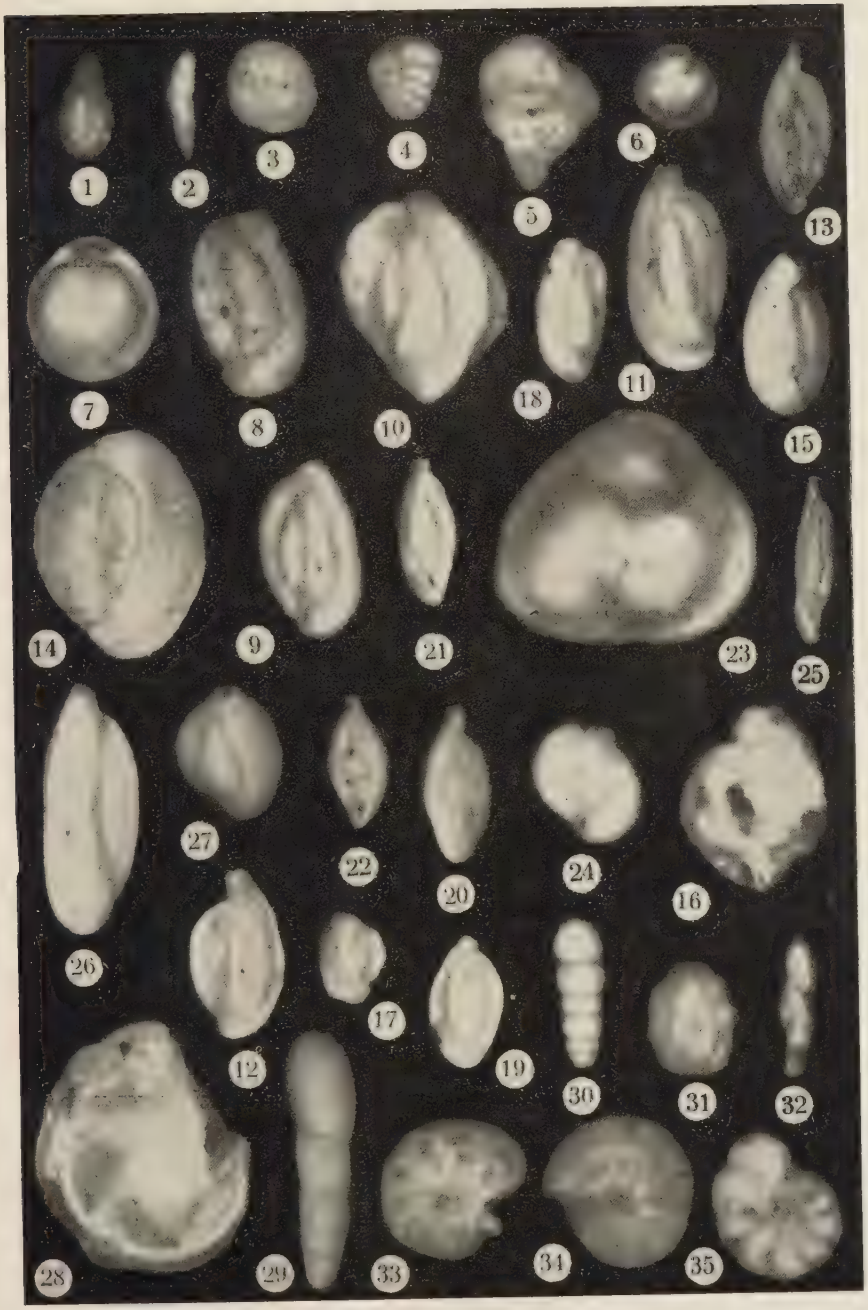

1
2
3
4
5
6
13
7
8
10
18
11
15
14
9
21
23
25
27
22
20
24
16
26
17
12
19
30
31
32
28
29
33
34
35

TAVOLA II

Fig. 1. - *Elphidium crispum* (L.)
» 2. » *macellum* (Fichtel e Moll)
» 3. » *nigarense* Cush.
» 4. - *Bulimina gibba* Fornasini
» 5. - » *inflata* Seguenza
» 7. - » *fusiformis* Will. var. *pupoides* Forn.
» 8. » *striata* d'Orb.
» 9. *Virgulina complanata* Egger
» 6. - » *marginata* d'Orb.
» 10. *Bolivina catanensis* Seguenza
» 11. » *plicatella* Cush.
» 12. » *spathulata* (Will.)
» 13. - » *subexcavata* Cush. e Wickenden
» 14. *Loxostomum limbatum* (Brady)
» 15. *Uvigerina peregrina* Cush.
» 16. » *pygmaea* d'Orb.
» 17. » *tenuistriata* Reuss var. *gaudrinoides* Lipparini
» 18. - *Siphonodosaria consobrina* (d'Orb.) var. *emaciata* Reuss
» 19. - » *monilis* (Silv.)
» 20. » *monilis* (Silv.) var. *laevigata* Silv.
» 21. » *fistuca* (Schwager)
» 22. *Trifarina bradyi* Cush.
» 23. - *Discorbis australis* Parr
» 24. » *concinna* (Brady)
» 25. » *globularis* (d'Orb.)
» 26. *Valvulineria bradyana* (Fornasini)
» 27. *Eponides praecinctus* (Karrer) var. *ornatus* Silv.
» 28. *Rotalia beccarii* (L.)
» 29. - *Sphaeroidina bulloides* d'Orb.
» 30. *Globigerina bulloides* d'Orb.
» 31. *Globigerinoides trilobus* (Reuss)
» 32. - *Globorotalia menardii* (d'Orb.)
» 33. *Acervulina inhaerens* Schultze
» 34. *Carpenteria utricularis* Carter
» 35. - *Cornuspira selseyensis* Heron-Allen e Earland

Tutte le figure sono × 15.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35

TAVOLA III

Aspetto d'insieme della fauna: vi si nota la particolare abbondanza delle Miliolidi (× 43).

Determinazione delle componenti di secondo ordine della deformazione riferite ad un generico sistema di coordinate curvilinee

Nota del prof. **Franco Mazzarella**, *presentata dal socio* **A. Galli**

(Adunanza del dì 6 marzo 1954)

Sunto. – Si considera la deformazione di un sistema elastico riferito ad un generico sistema di coordinate curvilinee e, prendendo le mosse dalle note espressioni delle componenti di deformazione di primo e secondo ordine riferite a coordinate cartesiane, si esegue la trasformazione di queste nel sistema di coordinate assunto; si assegnano le espressioni di tali componenti nel caso particolare di coordinate cilindriche e coordinate sferiche.

Nelle applicazioni del metodo energetico alla determinazione dei carichi critici, è ben noto che, occorre considerare la variazione seconda della energia potenziale totale e perciò, nell' esprimere questa energia in funzione delle componenti di spostamento, occorre considerare anche i termini in cui tali componenti, o le loro derivate, compaiono a secondo grado; quindi restano modificate anche le espressioni delle componenti di deformazione, e propriamente a quelle usuali si dovranno aggiungere degli altri termini. Risulta allora naturale di chiamare componenti del primo ordine quelle usate abitualmente e « *componenti di secondo ordine* » le sei somme di termini addittivi aggiunti a ciascuna delle componenti del primo.

Della valutazione di tali componenti del secondo ordine si sono già occupati vari illustri cultori della Scienza delle Costruzioni ed in particolare ricordiamo i pregevoli lavori di A. Galli e G. Krall, pur tuttavia si è creduto opportuno ritornare sull' argomento, sia perchè la via che si espone nel presente lavoro è completamente diversa da quella seguita dagli altri Autori, sia perchè negli studi precedenti sono assegnate in forma esplicita le espressioni delle componenti del secondo ordine solo per particolari sistemi di coordinate mentre qui si danno delle formule che sono senz' altro applicabili a qualunque sistema ed inoltre si particolarizzano quelle nel caso delle coordinate sferiche che non compaiono nei precedenti studi.

Si siano riferiti i punti di un corpo continuo deformabile ad un generico sistema di coordinate curvilinee ortogonali ed in particolare si con-

siderino due punti P e Q di esso e siano (u_1, u_2, u_3) le coordinate del secondo.

Si consideri ancora una terna di coordinate cartesiane ortogonali (x_1, x_2, x_3) con origine nel punto P e con gli assi tangenti alle linee coordinate nello stesso punto e si indichi con β_{ij} il coseno dell'angolo che la tangente alla linea coordinata $i-ma$ nel punto Q forma con l'asse x_j; sicchè i coseni direttori delle tre rette tangenti in Q alle linee coordinate rispetto alla terna x risultano i numeri β_{ij}, legati dalle ben note relazioni:

$$\sum_{j=1}^{3} \beta_{ij}\, \beta_{rj} = \begin{matrix} 0 & \text{per } i \neq r \\ 1 & \text{per } i = r \end{matrix}$$

e sia ancora

$$ds^2 = K_1^2\, du_1^2 + K_2^2\, du_2^2 + K_3^2\, du_3^2 \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare nel riferimento assunto, ricordando che i coefficienti K sono delle funzioni delle variabili indipendenti che debbono soddisfare alle ben note condizioni di Riemann.

Si indicano con $w_i(Q) = w_i(u_1\, u_2\, u_3) = w_j(u_j)$ le componenti del vettore spostamento del punto Q secondo la terna tangente in Q alle linee coordinate e siano y_i le componenti dello stesso vettore rispetto alla terna x; ovviamente varranno le relazioni:

$$y_i = \sum_{j=1}^{3} \beta_{ji}\, w_j \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

Le componenti della deformazione, valutate nel punto Q rispetto alla terna x si ottengono tramite le derivate $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$; per lo scopo propostoci dovremo perciò esprimere tali derivate in funzione delle coordinate curvilinee e delle componenti w_i del vettore spostamento rispetto alla terna tangente.

Per la nota regola di derivazione delle funzioni composte abbiamo:

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_s} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial y_t}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_s} = \sum_{j,m=1}^{3} \frac{\partial (\beta_{jt}\, w_j)}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_s} =$$

$$= \sum_{j,m=1}^{3} \beta_{jt} \frac{\partial w_j}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_s} + \sum_{j,m=1}^{3} w_j \frac{\partial \beta_{jt}}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_s} \tag{3}$$

Dobbiamo ora trasformare questa formula, tenendo presente le espressioni delle derivate delle u_m rispetto alle x_s e quelle dei coseni direttori β_{ij} rispetto alle variabili indipendenti u_m (vedi MAZZARELLA. *Applicazioni delle coordinate curvilinee alla soluzione di problemi di scienze delle costruzioni.* Atti Acc. Pontaniana).

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_s} = \frac{1}{K_m}\,\beta_{ms} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{jt}}{\partial u_m} = \frac{K_m}{r_{j\cdot m}}\,\beta_{mt} \qquad\qquad (\text{per } j \neq m \qquad t, m, j = 1\ 2, 3) \\ &\frac{\partial \beta_{jt}}{\partial u_j} = -\,K_j\left(\frac{\beta_{j+1\cdot t}}{r_{j+1\cdot j}} + \frac{\beta_{j+2\cdot t}}{r_{j+2\cdot j}}\right) \qquad\qquad (j, t = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{5}$$

dove $r_{j\cdot i}$ indica il raggio di curvatura principale della j-*ma* superficie coordinata, secondo la direzione i-*ma* e dove evidentemente quando $j+1$ o $j+2$ risultasse maggiore di 3 si dovrebbe sostituire 4 con 1 e 5 con 2. Ricordiamo ancora che i raggi di curvatura principali delle superfici coordinate si esprimono tramite i coefficienti K con le relazioni.

$$\frac{1}{r_{ji}} = \frac{1}{K_i \cdot K_j}\,\frac{\partial K_i}{\partial u_j} \tag{6}$$

Sostituendo le espressioni (4) e (5) nella (3) questa diventa

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_t}{\partial x_s} = \sum_{m\cdot j=1}^{3} \beta_{jt}\,\beta_{ms}\,\frac{1}{K_m}\,\frac{\partial w_j}{\partial u_m} + \sum_{j-1}^{3} w_j\Big(&-\frac{\beta_{j+1\cdot t}}{r_{j+1\cdot j}}\,\beta_{js} - \\ &-\frac{\beta_{j+2\cdot t}}{r_{j+2\cdot j}}\,\beta_{js} + \frac{\beta_{j+1\cdot t}}{r_{j\cdot j+1}}\,\beta_{j+1\cdot s} + \frac{\beta_{j+2\cdot t}}{r_{j\cdot j+2}}\,\beta_{j+2\cdot s}\Big) \end{aligned} \tag{7}$$

Se ora si fa coincidere il punto Q col punto P la terna tangente coinciderà con la terna x e le β_{ij} assumeranno i valori

$$\beta_{js} = \begin{matrix} 0 & \text{per } s \neq j \\ 1 & \text{per } s = j \end{matrix}$$

ed in conseguenza la (7) si semplifica in: (a secondo che i è uguale o diverso da s):

$$(8)\qquad \left(\frac{\partial y_s}{\partial x_s}\right)_P = \frac{1}{K_s}\frac{\partial w_s}{\partial u_s} + \frac{w_{s+2}}{r_{s+2,s}} + \frac{w_{s+1}}{r_{s+1,s}}$$

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_s}\right)_P = \frac{1}{K_s}\frac{\partial w_i}{\partial u_s} - \frac{w_s}{r_{i,s}} \qquad \text{per} \qquad i \neq s$$

Le componenti di deformazione di primo e secondo ordine, quando si assume un riferimento cartesiano sono notoriamente:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial y_{i+1}}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_{i+2}}{\partial x_i}\right)^2\right]$$

$$\gamma_{i,i+1} = \frac{\partial y_i}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial y_{i+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial y_{i+2}}{\partial x_{i+1}}\frac{\partial y_{i+2}}{\partial x_i} - \frac{\partial y_i}{\partial x_i}\frac{\partial y_{i+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial y_i}{\partial x_{i+1}}\frac{\partial y_{i+1}}{\partial x_{i+1}}$$

e se sostituiamo in esse le espressioni (8) delle derivate delle y rispetto alle x otteniamo le formule che ci eravamo proposti di determinare Propriamente abbiamo:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{K_s}\frac{\partial w_s}{\partial u_s} + \frac{w_{s+2}}{r_{s+2,s}} + \frac{w_{s+1}}{r_{s+1,s}} + \frac{1}{2K_s^2}\left[\left(\frac{\partial w_{s+1}}{\partial u_s}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_{s+2}}{\partial u_s}\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{w_s^2}{r^2_{s+1,s}} + \frac{w_s^2}{r^2_{s+2,s}}\right] - \frac{w_s}{K_s}\left[\frac{\partial w_{s+1}}{\partial u_s}\frac{1}{r_{s+1,s}} + \frac{\partial w_{s+2}}{\partial u_s}\frac{1}{r_{s+2,s}}\right]$$

$$\gamma_{s,s+1} = \frac{1}{K_s}\frac{\partial w_{s+1}}{\partial u_s} + \frac{1}{K_{s+1}}\frac{\partial w_s}{\partial u_{s+1}} - \frac{w_s}{r_{s+1,s}} - \frac{w_{s+1}}{r_{s,s+1}} +$$
$$+ \frac{1}{K_s}\frac{1}{K_{s+1}}\frac{\partial w_{s+2}}{\partial u_s}\frac{\partial w_{s+2}}{\partial u_{s+1}} - \frac{1}{K^2_s}\frac{\partial w_s}{\partial u_s}\frac{\partial w_{s+1}}{\partial u_s} -$$
$$- \frac{1}{K^2_{s+1}}\frac{\partial w_s}{\partial u_{s+1}}\frac{\partial w_{s+1}}{\partial u_{s+1}} + \frac{w_s w_{s+1}}{r^2_{s+1,s}} + \frac{w_s w_{s+1}}{r^2_{s,s+1}} +$$
$$+ \frac{w_s w_{s+2}}{r_{s+1,s}r_{s+2,s}} + \frac{w_{s+1}w_{s+2}}{r_{s,s+1}r_{s+2,s-1}} + \frac{w_s w_{s+1}}{r_{s+2,s}r_{s-2,s-1}} -$$
$$- \frac{1}{K_s}\left(\frac{\partial w_{s+2}}{\partial u_s}\frac{w_{s+1}}{r_{s+2,s+1}} + \frac{\partial w_{s+1}}{\partial u_s}\frac{w_{s+2}}{r_{s+2,s}} + \frac{\partial w_{s+1}}{\partial u_s}\frac{w_{s+1}}{r_{s+1,s}} - \frac{\partial w_s}{\partial u_s}\frac{w_s}{r_{s+1,s}}\right) -$$
$$- \frac{1}{K_{s+1}}\left(\frac{\partial w_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\frac{w_s}{r_{s+2,s}} + \frac{\partial w_s}{\partial u_{s+1}}\frac{w_{s+2}}{r_{s+2,s+1}} + \frac{\partial w_s}{\partial u_{s+1}}\frac{w_s}{r_{s,s+1}} - \frac{\partial w_{s-1}}{\partial u_{s+1}}\frac{w_{s-1}}{r_{s,s+1}}\right)$$

Particolarizziamo le formule ora scritte al caso delle coordinate cilindriche, e propriamente assumiamo come famiglia di superfici u_1 un fascio di piani

paralleli, come superfici u_2 un'infinità di piani, di giacitura variabile ma sempre ortogonale a quella dei piani u_1, ed infine come u_3 le superficie cilindriche a generatrici normali ai piani u_1 ed aventi come direttrici le traiettorie ortogonali delle tracce dei piani u_2 su un generico u_1. Risulterà evidentemente

$$ds_1 = du_1\,,\; ds_2 = (\mathrm{R} + u_3)\,du_2\,,\; ds_3 = du_3$$

dove R, funzione solo di u_2, rappresenta il raggio di curvatura di una particolare linea u_2 che si assume come riferimento da cui si contano le u_3. Si ha di conseguenza:

$$\frac{1}{r_{21}} = \frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{r_{12}} = 0\,,\quad \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{\mathrm{R} + u_3}$$

ed allora le formule precedenti si riducono a

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial w_1}{\partial u_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial u_1}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\mathrm{R} + u_3}\frac{\partial w_2}{\partial u_2} + \frac{w_3}{\mathrm{R} + u_3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(\mathrm{R} + u_3)^2}\left[\left(\frac{\partial w_3}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_2}\right)^2\right] - \frac{1}{(\mathrm{R}+u_3)^2}\frac{\partial w_3}{\partial u_2} + \\ + \frac{w_3^2}{2\,(\mathrm{R} + a_3)^2}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial w_3}{\partial u_3} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^2}{\partial u_3}\right)^2\right]$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial w_2}{\partial u_1} + \frac{\partial w_1}{\partial u_2}\frac{1}{\mathrm{R} + u_3} + \frac{1}{\mathrm{R} + u_3}\frac{\partial w_3}{\partial u_1}\frac{\partial w_3}{\partial u_2} - \frac{\partial w_1}{\partial u_1}\frac{\partial w_2}{\partial u_1} - \\ - \frac{1}{(\mathrm{R} + u_3)^2}\frac{\partial w_1}{\partial u_2}\frac{\partial w_2}{\partial u_2} - \frac{\partial w_3}{\partial u_1}\frac{w_2}{\mathrm{R} + u_3} - \frac{\partial w_1}{\partial u_2}\frac{w_s}{(\mathrm{R} + u_s)^2}$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{\mathrm{R} + u_3}\frac{\partial w_s}{\partial u_2} + \frac{\partial w_2}{\partial u_3} - \frac{w_2}{\mathrm{R} + u_3} + \frac{1}{\mathrm{R} + u_3}\frac{\partial w_1}{\partial u_3}\frac{\partial w_1}{\partial u_2} - \frac{\partial w_2}{\partial u_3}\frac{\partial w_3}{\partial u_3} - \\ - \frac{1}{(\mathrm{R} + u_3)^2}\frac{\partial w_2}{\partial u_2}\frac{\partial w_3}{\partial u_2} + \frac{w_2 w_3}{(\mathrm{R} + u_3)^2} - \\ - \frac{w_3}{(\mathrm{R} + u_3)^2}\frac{\partial w_3}{\partial u_2} + \frac{w_2}{(\mathrm{R} + u_3)^2}\frac{\partial w_2}{\partial u_2}$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial w_1}{\partial u_3} + \frac{\partial w_3}{\partial u_1} + \frac{\partial w_2}{\partial u_1}\frac{\partial w_2}{\partial u_3} - \frac{\partial w_1}{\partial u_1}\frac{\partial w_3}{\partial u_1} - \frac{\partial w_1}{\partial u_3}\frac{\partial w_3}{\partial u_3}$$

Consideriamo ora il caso in cui una delle famiglie di superfici coordinate sia di rotazione. Per tal motivo prendiamo le mosse, come nel caso precedente, da una infinità di rette contenute in un piano π, e dalle curve C che le tagliano tutte ortogonalmenle e facciamo ruotare π intorno ad una sua retta a.

Assumiamo allora come superfici u_1 i piani del fascio di asse a; come u_2 i coni ottenuti dalla rotazione delle rette precedentemente considerate ed infine come u_3 le superfici ottenute dalla rotazione delle curve C, curve che costituiranno le linee u_2.

Riferendosi allora ad una particolare delle curve C, per la quale si pone $u_3 = 0$, e detto $R(u_2)$ il suo raggio di curvatura in un punto qualunque, si avrà immediatamente

$$ds_3 = du_3 \quad , \qquad ds_2 = [R(u_2) + u_3]\, du_2$$

Detta ancora $Z(u_2)$ la distanza di un punto della curva C_0 dallo asse a, sarà

$$\frac{dZ}{du_2} = R \cos u_2$$

$$ds_1 = (Z + u_3 \operatorname{sen} u_2)\, du_1$$

e quindi

$$k_1 = Z + u_3 \operatorname{sen} u_2 = \int k_2 \cos u_2 \, du_2$$

$$k_2 = R(u_3) + u_3$$

$$k_3 = 1$$

$$\frac{1}{r_{13}} = \frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{r_{12}} = 0\,; \qquad \frac{1}{r_{31}} = \frac{\cos u_2}{Z + u_3 \operatorname{sen} u_2}\,;$$

$$\frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{R + u_3}\,; \qquad \frac{1}{r_{21}} = \frac{\cos u_2}{Z + u_3 \operatorname{sen} u_2}$$

dopo di che si hanno per le componenti di deformazione le seguenti espressioni:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Z + u_3 \operatorname{sen} u_2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial u_1} - w_2 \cos u_2 - w_3 \operatorname{sen} u_2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\,(Z + u_3 \operatorname{sen} u_2)^2}\left[\left(\frac{\partial w_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial u_1}\right)^2 + w_1^2 -\right.$$

$$\left. - 2w_1\left(\frac{\partial w_2}{\partial u_1}\cos u_2 + \frac{\partial w_3}{\partial u_1}\operatorname{sen} u_2\right)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{R + u_3}\left[\frac{\partial w_2}{\partial u_2} - w_3\right] + \frac{1}{2\,(R + u_3)^2}\left[\left(\frac{\partial w_3}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_2}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + w_2^2 + - 2\,\frac{\partial w_3}{\partial u_1} w_2\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial w_3}{\partial u_3} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial u_3}\right)^2\right]$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{k_1}\frac{\partial w_2}{\partial u_1} + \frac{1}{k_2}\frac{\partial w_1}{\partial u_2} - \frac{w_1 \cos u_2}{k_1} + \frac{1}{k_1 k_2}\frac{\partial w_3}{\partial u_1}\frac{\partial w_3}{\partial u_2} -$$

$$- \frac{1}{k_1^2}\frac{\partial w_1}{\partial u_1}\frac{\partial w_2}{\partial u_2} - \frac{1}{k_2^2}\frac{\partial w_1}{\partial u_2} - \frac{w_2}{k_1 k_2}\frac{\partial w_3}{\partial u_1} - \frac{w_1 \operatorname{sen} u_2}{k_1 k_2}\frac{\partial w_3}{\partial u_2} -$$

$$- \frac{w_3 \operatorname{sen} u_2}{k_1^2}\frac{\partial w_2}{\partial u_1} - \frac{w_2}{k_1^2}\cos u_2 \frac{\partial w_2}{\partial u_1} + \frac{w_2}{k_1^2}\cos u_2 \frac{\partial w_1}{\partial u_2} -$$

$$- \frac{w_2}{k_2^2}\frac{\partial w_1}{\partial u_2} + \frac{w_1 w_2 \cos u_2}{k_1^2} + \frac{w_1 w_2 \operatorname{sen} u_2}{k_1 k_2} + \frac{w_1 w_3 \operatorname{sen} u_2 \cos u_2}{k_1^2}$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{k_2}\frac{\partial w_3}{\partial u_2} + \frac{\partial w_2}{\partial u_3} - \frac{w_2}{k_2} + \frac{1}{k_2}\frac{\partial w_1}{\partial u_2}\frac{\partial w_1}{\partial u_3} - \frac{1}{k_2}\frac{\partial w_2}{\partial u_2}\frac{\partial w_1}{\partial u_2} -$$

$$- \frac{\partial w_2}{\partial u_3}\frac{\partial w_3}{\partial u_3} + \frac{1}{k_2^2}\left(w_2 \frac{\partial w_2}{\partial u_2} + w_2 w_3 - w_3 \frac{\partial w_3}{\partial u_2}\right)$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial w_1}{\partial u_3} + \frac{1}{k_2}\frac{\partial w_3}{\partial u_1} - \frac{w_1 \operatorname{sen} u_2}{k_1} + \frac{1}{k_1}\frac{\partial w_2}{\partial u_1}\frac{\partial w_2}{\partial w_2} -$$

$$- \frac{1}{k_1^2}\frac{\partial w_1}{\partial u_1}\frac{\partial w_3}{\partial u_1} - \frac{\partial w_1}{\partial u_3}\frac{\partial w_3}{\partial u_3} - \frac{w_1 \cos u_2}{k_1}\frac{\partial w_2}{\partial u_3} -$$

$$- \frac{1}{k_1^2}\left(w_2 \cos u_2 \frac{\partial w_3}{\partial u_1} + w_3 \operatorname{sen} u_2 \frac{\partial w_3}{\partial u_1} - w_1 \operatorname{sen} u_2 \frac{\partial w_1}{\partial u_1} -\right.$$

$$\left. - w_1 w_3 \operatorname{sen}^2 u_2 - w_1 w_2 \operatorname{sen} u_2 \cos u_2\right)$$

Nel caso particolare delle coordinate sferiche le linee C sono dei cerchi, e quindi si può porre

$$R(u_2) = Z = 0 \quad ; \qquad k_2 = u_3 \quad ; \qquad k_1 = u_3 \operatorname{sen} u_2$$

con che le espressioni ora ricavate si semplificano ulteriormente.

Se nelle varie espressioni delle componenti di deformazione scritte precedentemente si annullano i termini di secondo ordine si ottengono le componenti di deformazione del primo ordine, le quali servono per la risoluzione di ogni problema di teoria dell' elasticità in cui non intervengono fenomeni di instabilità e non interessano deformazioni del secondo ordine.

Napoli, Istit. di Costruz. di legno, ferro e c. a. dell' Università, marzo 1954.

La risoluzione delle equazioni di secondo e terzo grado nell' algebra dei numeri triduali

Nota del dott. **Angelo Fadini**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 15 maggio 1954)

Sunto. — Applicando il teorema fondamentale delle algebre supercomplesse si risolvono e si discutono le equazioni algebriche di 2° e 3° grado nell' algebra dei numeri triduali, aventi il 1° coefficiente non divisore dello zero.

Premessa. — In una recente memoria [1]) il prof. N. Spampinato, richiamato il teorema fondamentale delle algebre supercomplesse, da lui dimostrato nel 1940, introduce i concetti di radici bisemplici, trisemplici,... bidoppie, tridoppie, . . . ecc. per le equazioni algebriche in tali algebre.

In questa nota, applicando i concetti esposti dal prof. Spampinato, do la risoluzione delle equazioni quadratiche e cubiche nell' algebra dei numeri triduali.

1. Consideriamo l' equazione quadratica ad una incognita ξ

$$F(\xi) = \xi^2 + a_1 \xi + a_2 = 0 \tag{1}$$

con i coefficienti nel campo dei numeri triduali costituenti l' algebra triduale, definita nel corpo complesso, di ordine 3, dotata di modulo u e con le unità soddisfacenti alla tabella di moltiplicazione :

	u	v	w
u	u	v	w
v	v	0	0
w	w	0	0

[1]) N. Spampinato. *La risoluzione delle equazioni algebriche del secondo e terzo grado nel campo biduale e tripotenziale.* La Ricerca, n' 1-2, 3 e 4 del 1954.

Posto:

$$\xi = xu + yv + z\,w$$

$$a_i = p_i u + q_i v + r_i w \qquad (i = 1\,,2)$$

la (1) ci dà:

$$(x^2+p_1x+p_2)u+[(2x+p_1)y+q_1x+q_2]v+[(2x+p_1)z+r_1x+r_2]w=0$$

Quest'equazione equivale quindi, nel campo complesso, al sistema di tre equazioni nelle tre incognite $x\,,y$ e z:

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2 + p_1x + p_2 = 0 \\ (2x + p_1)y + q_1x + q_2 = 0 \\ (2x + p_1)z + r_1x + r_2 = 0 \end{cases}$$

Posto: $\Delta_1 = p_1{}^2 - 4p_2$, dalla prima equazione del sistema si ricava:

$$x = \frac{1}{2}\left(-p_1 \pm \sqrt{\Delta_1}\right) = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

ed ovviamente se $\Delta_1 = 0$ risulta $x_1 = x_2$. Dalla seconda e dalla terza delle (2) si ricava:

$$y = -\frac{q_1x + q_2}{2x + p_1}\quad , \qquad z = -\frac{r_1x + r_2}{2x + p_1}$$

quindi se $\Delta_1 \neq 0$ l'equazione ammette due sole soluzioni ed esse sono:

$$(3)\qquad \xi_1 = x_1u + y_1v + z_1w\quad ,\quad \xi_2 = x_2u + y_2v + z_2w$$

nelle quali i valori di $x_1\,,y_1\,,z_1\,;\ x_2\,,y_2$ e z_2 sono dati da:

$$(4_1)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\left(-p_1 - \sqrt{\Delta_1}\right) \\ y_1 = -\dfrac{q_1x_1 + q_2}{2x_1 + p_1} = \dfrac{1}{2}\left(-q_1 - \dfrac{p_1q_1 - 2q_2}{\sqrt{\Delta_1}}\right) \\ z_1 = -\dfrac{r_1x_1 + r_2}{2x_1 + p_1} = \dfrac{1}{2}\left(-r_1 - \dfrac{p_1r_1 - 2r_2}{\sqrt{\Delta_1}}\right) \end{cases}$$

$$(4_2)\qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2}\left(-p_1 + \sqrt{\Delta_1}\right) \\ y_2 = -\dfrac{q_1 x_2 + q_2}{2x_2 + p_1} = \dfrac{1}{2}\left(-q_1 + \dfrac{p_1 q_1 - 2q_2}{\sqrt{\Delta_1}}\right) \\ z_2 = -\dfrac{r_1 x_2 + r_2}{2x_2 + p_1} = \dfrac{1}{2}\left(-r_1 + \dfrac{p_1 r_1 - 2r_2}{\sqrt{\Delta_1}}\right) \end{cases}$$

Esaminiamo ora il caso $\Delta_1 = 0$, la prima delle (2) fornisce $x_1 = x_2 = -\dfrac{p_1}{2}$. In tal caso però, essendo $-\dfrac{1}{2}p_1$ radice doppia della prima delle (2), essa è anche radice della derivata prima di tale equazione, cioè del coefficiente di y e di z nelle altre due equazioni del sistema (2). Il sistema quindi *non* fornisce valori determinati per la y e per la z. Ciò d'altra parte si rileva anche dalle formole risolutive (4_1) e (4_2).

Poniamo per brevità:

$$\Delta_2 = p_1 q_1 - 2q_2 \quad , \quad \Delta_3 = p_1 r_1 - 2r_2$$

ed esaminiamo i seguenti quattro casi:

$$\begin{array}{lllll} 1^0) & \Delta_1 = 0 & , & \Delta_2 = 0 & , & \Delta_3 = 0 \\ 2^0) & \Delta_1 = 0 & , & \Delta_2 = 0 & , & \Delta_3 \neq 0 \\ 3^0) & \Delta_1 = 0 & , & \Delta_2 \neq 0 & , & \Delta_3 = 0 \\ 4^0) & \Delta_1 = 0 & , & \Delta_2 \neq 0 & , & \Delta_3 \neq 0 \end{array}$$

Nel primo caso la seconda e la terza equazione del sistema (2) assumono la forma indeterminata

$$0y + 0 = 0 \quad , \quad 0z + 0 = 0$$

e sono quindi soddisfatte da qualunque valore di y o di z; pertanto il sistema (2) ammette una doppia infinità di soluzione e lo stesso avviene per l'equazione (1) che è soddisfatta da:

$$(5)\qquad \zeta = -\frac{p_1}{2}u + hv + kw$$

con h e k numeri complessi qualsivogliano.

Nel secondo caso mentre la seconda equazione del sistema (2) è indeterminata, la terza è impossibile, il sistema fornisce quindi le soluzioni:

$$x = -\frac{p_1}{2} \quad , \qquad y = \text{qualunque} \quad , \qquad z = \infty$$

l'equazione (1) non ammette soluzioni a coefficienti finiti, ma ammette una semplice infinità di soluzioni del tipo

$$\xi = -\frac{p_1}{2} u + h v + \infty w \tag{6}$$

con h arbitrario.

Il terzo caso è analogo al secondo differendone solo per lo scambio di y con z. La soluzione è ora, con k arbitrario:

$$\xi = -\frac{p_1}{2} u + \infty v + k w \tag{7}$$

Nel quarto caso le due equazioni in y e in z del sistema (2) sono entrambe impossibili. L'equazione non ammette soluzioni a coefficienti finiti; ma ammette la sola soluzione:

$$\xi = -\frac{p_1}{2} u + \infty v + \infty w \tag{8}$$

I risultati ottenuti possono essere messi in relazione coi valori del discriminante triduale dell'equazione (1). Esso è:

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 = (p_1^2 - 4p_2) u + 2 (p_1 q_1 - 2q_2) v + 2 (p_1 r_1 - 2r_2) w$$

ossia:

$$\Delta = \Delta_1 u + \Delta_2 v + \Delta_3 w$$

Si riconosce che Δ è non nullo nè divisore dello zero se Δ_1 è diverso da zero.

I quattro casi in cui è $\Delta_1 = 0$ corrispondono ai seguenti valori di Δ:

1° caso: Δ è nullo
2° caso: Δ è divisore dello zero della prima schiera
3° caso: Δ è divisore dello zero della seconda schiera
4° caso: Δ è divisore misto dello zero

Possiamo dunque riassumere tutta la discussione precedente nel seguente modo:

L'equazione quadratica triduale (1) *ammette due soluzioni distinte fornite dalle* (3) *e* (4) *se, e solo se, il suo discriminante* Δ *è non nullo, nè divisore dello zero.*

Essa ammette una doppia infinità di soluzioni fornite dalle (5) *se il suo discriminante* Δ *è nullo.*

Se Δ *è un divisore dello zero l'equazione non ammette soluzioni a coefficienti finiti; ma se* Δ *è divisore dello zero della prima schiera, cioè del tipo* $\Delta = \Delta_2 v$, *l'equazione ammette le infinite soluzioni* (7); *se* Δ *è divisore dello zero della seconda schiera, cioè del tipo* $\Delta = \Delta_3 w$, *l'equazione ammette le infinite soluzioni* (6) *e se infine* Δ *è divisore misto dello zero, cioè del tipo:* $\Delta = \Delta_2 v + \Delta_3 w$ *l'equazione ammette la sola soluzione* (8).

2. — Studiamo ora la relazione esistente fra le radici dell'equazione (1) e la derivata totale della funzione F (ξ), che uguagliata a zero dà l'equazione (1). Tale derivata è:

$$F'(\xi) = 2\xi + a_1 = (2x + p_1)\,u + (2y + q_1)\,v + (2z + r_1)\,w.$$

Poichè il coefficiente di u si annulla solo se $x = -\frac{p_1}{2}$, ossia se $\Delta_1 = 0$, possiamo subito affermare che *se il descriminante* Δ *della* (1) *è non nullo, nè divisore dello zero, la* F'(ξ) *per* $\xi_1 = \xi_1$ *o per* $\xi = \xi_2$ *non si annulla e non acquista valore divisore dello zero.* Le radici ξ_1 e ξ_2 si diranno perciò **semplici.**

Se poi $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ e quindi è $\Delta = 0$, l'equazione ammette le ∞^2 soluzioni seguenti nelle quali y e z sono arbitrari:

$$\xi = -\frac{p_1}{2}\,u + yv + zw \tag{5}$$

e per tale valore di ξ la derivata totale F'(ξ) assume un valore divisore dello zero e proprio il valore dello zero in corrispondenza della radice:

$$\xi = -\frac{p_1}{2}\,u - \frac{q_1}{2}\,v - \frac{r_1}{2}\,w \tag{9}$$

che è una delle (5).

Perciò la radice (9) si dirà come nel caso ordinario **radice doppia** della (1), mentre le infinite radici (5) si diranno **radici bi-semplici.**

Consideriamo ora i casi in cui il discriminante Δ della (1) è divisore

dello zero. Abbiamo visto che in corrispondenza ai tre casi:

$$\Delta = \Delta_3 w \quad \text{oppure} \quad \Delta = \Delta_2 v \quad \text{oppure} \quad \Delta = \Delta_2 v + \Delta_3 w$$

le soluzioni dell'equazione sono date dalle formole (6), (7) e (8). I valori assunti dalla $F'(\xi)$ in corrispondenza dei valori (6), (7) ed (8) di ξ sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= (2y + q_1)\, v + \infty\, w \\ F'(\xi) &= \infty\, v + (2z + r_1)\, w \\ F'(\xi) &= \infty\, v + \infty\, w. \end{aligned}$$

Dunque se Δ è un divisore dello zero in corrispondenza alle radici infinite della $F(\zeta) = 0$ la derivata totale $F'(\xi)$ assume valore infinito.

Diremo tali radici singolari.

3. — Consideriamo ora l'equazione di secondo grado in ξ nella forma:

$$(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) = 0 \tag{10}$$

con:

$$\xi_i = x_i u + y_i v + z_i w \qquad (i = 1, 2)$$

Sviluppando i calcoli, dalla (10) si deduce il sistema complesso:

$$\left\{ \begin{aligned} &(x - x_1)(x - x_2) = 0 \\ &(x - x_1)(y - y_2) + (x - x_2)(y - y_1) = 0 \\ &(x - x_1)(z - z_2) + (x - x_2)(z - z_1) = 0 \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Se $x_1 \neq x_2$ e quindi la differenza $\xi_1 - \xi_2$ non è nè nulla nè divisore dello zero, il sistema (11) ammette le sole due soluzioni

$$x = x_1\,, \quad y = y_1 \text{ ed} \quad x = x_2\,, \quad y = y_2.$$

Se $x_1 = x_2$ e quindi $\xi_1 - \xi_2$ è divisore dello zero, la prima delle (17) ammette la radice $x = x_1$ quale soluzione doppia. In tal caso le altre due equazioni del sistema (17) diventano:

$$\left\{ \begin{aligned} &(x - x_1)(2y - y_1 - y_2) = 0 \\ &(x - x_1)(2z - z_1 - z_2) = 0 \end{aligned} \right.$$

e queste per $x = x_1$ restano soddisfatte quali che siano i valori di y e di z. Cioè la (10) viene soddisfatta dalle infinite radici

$$\xi_1 = x_1 u + y v + z w$$

con y e z numeri complessi arbitrari.

Dunque *l'equazione quadratica triduale* (10) *ammette le sole due radici* ξ_1 *e* ξ_2 *se la differenza* $\xi_1 - \xi_2$ *non è divisore dello zero o nulla, ammette invece infinite radici se tale differenza è divisore dello zero.*

Si osservi che dalla (10) non si ricava il caso delle radici con coefficienti delle unità ∞. E invero dalla (10) si ricava:

$$\xi^2 - (\xi_1 + \xi_2)\,\xi + \xi_1\,\xi_2 = 0 \tag{12}$$

e posto

$$-(\xi_1 + \xi_2) = a_1 \quad , \quad \xi_1\,\xi_2 = a_2 \tag{13}$$

la (12) s'identifica con la (1).

Le (13) nel campo complesso diventano

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -p_1 \\ y_1 + y_2 = -q_1 \\ z_1 + z_2 = -r_1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1\,x_2 = p_2 \\ x_1\,y_2 + x_2\,y_1 = q_2 \\ x_1\,z_2 + x_2\,z_1 = r_2 \end{array}\right. \tag{14}$$

Se $x_1 = x_2$ il sistema diventa:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 = -p_1 \\ y_1 + y_2 = -q_1 \\ z_1 + z_2 = -r_1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1^2 = p_2 \\ x_1\,(y_1 + y_2) = q_2 \\ x_1\,(z_1 + z_2) = r_2 \end{array}\right.$$

dal quale si ricava:

$$p_1^2 - 4p_2 = 0$$

dunque l'essere $x_1 = x_2$ implica che sia $\Delta_1 = p_1^2 - 4p_2 = 0$. Inoltre poichè in tal caso $x_1 = -\frac{1}{2}\,p_1$ si ha:

$$y_1 + y_2 = -q_1 \qquad \text{ed anche} \qquad y_1 + y_2 = -\frac{2q_2}{p_1}$$

$$z_1 + z_2 = -r_1 \qquad \text{ed anche} \qquad z_1 + z_2 = -\frac{2r_2}{p_1}$$

Pertanto la determinazione di y_1, y_2; z_1 e z_2 impone che si abbia

$$\Delta_2 = p_1 q_1 - 2q_2 = 0 \quad , \qquad \Delta_3 = p_1 r_1 - 2r_2 = 0$$

ed in tal caso riesce $\Delta = 0$.

Dunque partendo dall' equazione quadratica nella forma (10) si ottengono i soli casi di $\Delta \neq 0$ e non divisore dello zero e di $\Delta = 0$ il caso Δ divisore dello zero non si presenta.

Ciò non può meravigliare visto che questo caso conduce a valori di ξ_1 e ξ_2 con coefficienti infiniti.

4. — Consideriamo ora l' equazione cubica ad una incognita ξ:

$$F(\xi) = \xi^3 + a_1 \xi^2 + a_2 \xi + a_3 = 0 \tag{15}$$

supposto, anche ora, che sia i coefficienti che l' incognita siano numeri dell' algebra dei numeri triduali, si riconosce agevolmente che la (15), nel campo triduale, equivale, nel campo complesso, al sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0 \\ (3x^2 + 2p_1 x + p_2)\, y + (q_1 x^2 + q_2 x + q_3) = 0 \\ (3x^2 + 2p_1 x + p_2)\, z + (r_1 x^2 + r_2 x + r_3) = 0 \end{array} \right. \tag{16}$$

Posto allora:

$$p = \frac{1}{3}\left(3p_2 - p_1^2\right) \tag{17}$$

$$q = \frac{1}{27}\left(27\, p_3 + 9\, p_1 \dot{p}_2 + 2\, p_1^3\right) \tag{18}$$

$$r = \left\{ -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right\}^{\frac{1}{3}} \tag{19}$$

$$s = \left\{ -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right\}^{\frac{1}{3}} \tag{20}$$

$$t = -\frac{p_1}{2}$$

le tre radici della prima equazione del sistema sono date da:

$$(21) \qquad \begin{cases} x_1 = r + s + t \\ x_2 = \varepsilon\, r + \varepsilon^2 s + t \\ x_3 = \varepsilon^2 r + \varepsilon\, s + t \end{cases}$$

essendo ε, ε^2, $\varepsilon^3 = 1$ le tre radici cubiche dell'unità reale 1, cioè:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$$

Le tre radici (21) sono distinte se

$$(22) \qquad D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \neq 0$$

Se invece è $D = 0$ dalle (19) e (20) si ricava

$$r = s = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = r'$$

e le (21) diventano

$$\begin{cases} x_1 = 2r' + t \\ x_2 = x_3 = t - r' \end{cases}$$

Infine se, essendo $D = 0$, si ha pure $q = 0$ e quindi anche $p = 0$, risulta $r' = 0$, le tre radici coincidono e si ha:

$$x_1 = x_2 = x_3 = t$$

Per ogni x_i ($i = 1, 2, 3$) data dalle (21) la 2ª e la 3ª delle (26) danno un ben determinato valore di y e di z, avendosi:

$$(23) \qquad y_i = -\frac{q_1 x_i^2 + q_2 x_i + q_3}{3x_i^2 + 2p_1 x_i + p_2}$$

$$(24) \qquad z_i = -\frac{r_1 x_i^2 + r_2 x_i + r_3}{3x_i^2 + 2p_1 x_i + p_2}$$

Questi valori di y e di z però sono determinati solo se x_i è radice semplice della prima delle (16), perchè se x_i è radice multipla, cioè se $D = 0$ nelle (23) e (24) risulta nullo il denominatore e quindi per y_i e z_i si ha il valore infinito se non è nullo il numeratore ed il valore indeterminato se è nullo anche il numeratore.

Ponendo ora

$$P = \frac{1}{3}\left(3a_2 - a_1^2\right), \qquad Q = \frac{1}{27}\left(27a_3 - 9a_1 a_2 + 2a_1^3\right)$$

il discriminante delle (15) nel campo triduale diventa:

$$\Delta = \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}$$

ed esplicitando tale espressione si ha:

$$\Delta = Du + D_1 v + D_2 w$$

con:

$$D_1 = \frac{1}{2} q_3 q - \frac{1}{6} p_1 q_2 q - \frac{1}{6} p q q_1 + \frac{1}{9} p^2 q_2 - \frac{2}{27} p_1 q_1 p^2$$

$$D_2 = \frac{1}{2} r_3 q - \frac{1}{6} p_1 r_2 q - \frac{1}{6} p q r_1 + \frac{1}{9} p^2 r_2 - \frac{2}{27} p_1 r_1 p^2$$

Di qui si riconosce che la condizione $D = 0$ equivale alla condizione che Δ sia divisore dello zero, dunque:

I) *l'equazione triduale cubica* (15) *ammette tre radici distinte*

$$\xi = x_i u + y_i v + z_i w \qquad (i = 1, 2, 3)$$

con i numeri complessi x_i, y_i *e* z_i *dati dalle* (21), (23) *e* (24), *se il discriminante triduale* Δ *è non nullo, nè divisore dello zero.*

5. — Si osservi ora che i coefficienti del modulo u nei due numeri triduali P e Q sono rispettivamente p e q e quindi se p e q sono entrambi non nulli, P, Q e Δ non sono divisori dello zero. Invece se $D = 0$ ed è $q \neq 0$ e quindi $p \neq 0$, risultano non divisori dello zero sia P che Q, mentre risulta divisore dello zero Δ. Infine se $D = 0$ ed anche $q = 0$ dev'essere $p = 0$ e quindi risultano divisori dello zero P, Q e Δ.

Si ha quindi:

II) *Se il discriminante* Δ *è divisore dello zero, senza essere divisore dello zero* Q (*e quindi* P), *l'equazione* (16) *ammette la radice:*

$$\xi_1 = a_1 u + y_1 v + z_1 w$$

con $x_1 = 2r' + t$ *ed* y_1 *e* z_1 *dati dalla* (23) *e* (24) *per* $x_i = x_1$ *e le radici*

$$\xi_2 = \xi_3 = x_2 u + y_2 v + z_2 w$$

con $x_2 = t - r'$ *ed* y_2 *e* z_2 *di valore infinito o qualunque secondo che per* $x_i = x_2$ *non si annulla o si annulla il numeratore delle* (23) *e* (24).

III) *Se il discrinante* Δ *è divisore dello zero insieme coi numeri* Q *e* P *l'equazione* (16) *ammette le radici*

$$\xi = tu + yv + zw$$

con y *e* z *di valore infinito o qualunque secondo che per* $x = t$ *non si annulla o si annulla il numeratore delle* (23) *e* (24).

6. — Determiniamo ora un'equazione algebrica del tipo (16) che ammetta quali sue radici tre dati numeri triduali ξ_1 ξ_2 ξ_3, essa è:

$$F(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3) = 0 \tag{25}$$

Posto:

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= -a_1 \\ \xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1 &= a_2 \\ \xi_1 \xi_2 \xi_3 &= -a_3 \end{aligned}$$

la (25) si riduce alla (16).

Con ovvie sostituzioni la (25) conduce al sistema complesso:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0 \\ (x - x_1)(x - x_2)(y - y_3) + (x - x_1)(x - x_3)(y - y_2) + (x - x_2)(x - x_3)(y - y_3) = 0 \\ (x - x_1)(x - x_2)(z - z_3) + (x - x_1)(x - x_3)(z - z_2) + (x - x_2)(x - x_3)(z - z_3) = 0 \end{array} \right. \tag{36}$$

Ora chiamando catena dei numeri triduali [1]) un sistema di tali numeri

[1]) Cfr. SPAMPINATO, nota citata.

caratterizzato dal fatto che tutti i numeri del sistema hanno lo stesso coefficiente del modulo, possiamo rilevare che:

I) *l'equazione cubica triduale avente tre date radici* $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ *ammette solo queste radici se e solo se due qualsivogliono delle tre radici non appartengono alla stessa catena; essa invece ammette quali radici tutti gli infiniti numeri della catena se due radici date appartengono alla stessa catena.*

Consideriamo infine il comportamento della *derivata totale* della funzione $F(\xi)$ per $\xi = \xi_i$. Dalle (25) si trae:

$$F'(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) + (\xi \quad \xi_2)(\xi - \xi_3) + (\xi - \xi_3)(\xi - \xi_1)$$

quindi

$$\begin{aligned} F'(\xi_1) = (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\,u + \\ + [(x_1 - x_2)(y_1 - y_3) + (x_1 - x_3)(y_1 - y_2)]\,v + \\ + [(x_1 - x_2)(z_1 - z_3) + (x_1 - x_3)(z_1 - z_2)]\,w \end{aligned}$$

Ne segue che per $x_1 = x_2 \neq x_3$ risulta

$$F'(\xi_1) = (x_1 - x_3)(y_1 - y_2)\,v + (x_1 - x_3)(z_1 - z_2)\,w$$

quindi $F'(\xi_1)$ non è nulla, ma è divisore dello zero, purchè sia $y_1 \neq y_2$ o $z_1 \neq z_2$.

Dunque:

Se due delle tre radici distinte $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ *dell'equazione cubica triduale* (25) *appartengono ad una stessa catena la derivata* $F'(\xi)$ *calcolata in una di tali radici assume valore non nullo, ma divisore dello zero; essa derivata assume valore nullo solo se le due radici coincidono. Seguendo la notazione* del prof. Spampinato diremo *bisemplici* le radici che rendono divisore dello zero la $F'(\xi)$; *doppie*, come nel caso complesso, quelle che annullano la $F'(\xi)$.

Nel caso $\xi_1 = \xi_2 \neq \xi_3$ è $F'(\xi_1) = 0$; calcolando la derivata seconda di $F(\xi)$ in ξ_1 si ha:

$$F''(\xi_1) = 2(\xi_1 - \xi_3) = 2[(x_1 - x_3)\,u + (y_1 - y_3)\,v + (z_1 - z_3)\,w]$$

da questa si ricava l'enunciato seguente:

Se le tre radici ξ_i *dell'equazione cubica triduale appartengono ad una stessa catena, la* $F''(\xi_1)$ *risulta divisore dello zero.* Tali radici diconsi *bidoppie*. Se poi risulta $F''(\xi_1) = 0$ la radice si dirà tripla, come nel caso complesso.

Riassumendo tutto quanto precede si ha:

l'equazione cubica triduale (16) *o* (25) *ammette le sole radici semplici* ξ_1, ξ_2, ξ_3 *quando, e solo quando, questi tre numeri triduali determinano tre catene distinte e ciò avviene quando il discriminante triduale* Δ *è non nullo, nè divisore dello zero.*

Se due di queste tre catene coincidono, ad esempio quelle determinate da ξ_1 *e* ξ_2, *l'equazione cubica ammette come radice semplice la* ξ_3, *come radici bi-semplici ogni altro numero triduale della catena a cui appartengono* ξ_1 *e* ξ_2 *e come radice doppia la semisomma delle radici* ξ_1 *e* ξ_2.

Ciò si verifica se Δ è divisore dello zero senza che lo siano P e Q.

Se infine le tre catene coincidono, l'equazione cubica ammette come radici bidoppie tutti i numeri della catena e come radice tripla la media aritmetica delle tre radici ξ_1 ξ_2 *e* ξ_3.

Ciò si verifica quando Δ, P e Q sono tutti divisori dello zero.

La sedimentazione dei terreni in facies di flysch secondo le antiche osservazioni di R. Zuber (con alcune considerazioni sul flysch dell'Italia meridionale)

Nota del dr. **Antonio Lazzari,** *presentata dal socio* **G. D' Erasmo**

(Adunanza del dì 15 maggio 1954)

Sunto. — Premesse alcune considerazioni sul significato dei termini " flysch „ ed " argille scagliose ", vengono ricordate le originali ed antiche osservazioni di R. Zuber sui fenomeni che si verificano nei tempi attuali nelle zone marine antistanti la foce dell' Orenoco e che presumibilmente riproducono quelli che debbono avere presieduto -- nei tempi geologici passati – alla formazione delle serie in faces di flysch.

Vengono poi esaminate le condizioni di giacitura del flysch paleogenico nell' Italia meridionale, giungendo alla conclusione che effettivamente questi terreni si debbono essere depositati in una zona di arcipelago (come vorrebbero le idee di R. Zuber), ai margini di un bacino sedimentario dotato di intenso movimento di subsidenza.

Negli ultimi anni si è fatto un gran parlare, in Italia, di *argille scagliose,* e vari studiosi, nella spiccata tendenza ad applicare alla nostra Penisola talune recenti vedute tettoniche, o nel desiderio di formulare teorie, seducenti si, ma non sempre rispondenti alle reali condizioni che si riscontrano sul terreno, sono giunti ad allontanarsi così sostanzialmente dal significato originario di quel termine, che si è finito con il creare una tale confusione di idee, e soprattutto di concetti da determinare — in definitiva — una certa difficoltà ad intendersi.

A ciò si aggiunga il fatto che, per ragioni non mai spiegate, a taluni non è più risultato soddisfacente l' uso del termine *flysch,* che pure ha un lungo passato, negandogli qualsiasi vero significato e contrapponendogli, in sostituzione, quello di *argille scagliose,* per il solo fatto che il flysch talvolta si presenta — non sempre, si badi bene — con alcune caratteristiche di caoticità (in buona parte, del resto, solo apparente) analoghe a quelle che sono proprie delle argille scagliose. Specialmente per l' Italia meridionale e per la Sicilia si è avuta una spiccata tendenza a tale sostituzione di termini, determinando in tal modo confusione di idee e contrasti di opinioni che certo non giovano alla esatta comprensione della geologia delle nostre regioni.

Ora, a guardare a quanto si è detto e scritto negli ultimi anni a proposito delle *argille scagliose* dell' Italia meridionale e della Sicilia, ci si accorge che una tale sostituzione di termini non ha certo contribuito alla migliore conoscenza della nostra geologia; e viene fatto di domandarsi da quali ragioni possa essere stato determinato il criterio che ha presieduto alla estensione del termine *argille scagliose* anche alle serie flyschioidi; e poichè — a bene esaminare le cose — non si riesce a trovar nulla che giustifichi, per l' Italia meridionale e per la Sicilia, l' ostracismo che si vorrebbe dare al flysch, così sorge spontaneo il pensiero che, in definitiva, di altro non si tratti che di una comoda e semplicistica maniera di guardare a quei potenti complessi sedimentari che sin dal 1827 vanno sotto il nome di flysch. Questo, difatti, se considerato alla stessa stregua delle argille scagliose, come una massa caotica ed eterogenea per età e per caratteri litologici, può essere anche studiato sul terreno in via generale e cartografato assai rapidamente.

Se invece consideriamo le serie del flysch nel loro vero aspetto e significato, non solo risulta possibile stabilire una ben definita stratigrafia anche per complessi di notevole potenza, ma è dato anche riconoscere che esse mancano — generalmente — di quella caoticità peculiare delle vere argille scagliose, tanto che in taluni casi se ne può seguire il loro andamento strutturale ben definito anche su aree molte vaste [1]).

E' quindi evidente che, a bene esaminare la questione, i due termini, *flysch* ed *argille scagliose,* possono coesistere; anzi essi *debbono* coesistere per indicare due cose sostanzialmente diverse per la facies, non essendo affatto autorizzati ad accomunare terreni sostanzialmente assai dissimili, solo a ragione di qualche analogia tettonica.

Or, se geologia è non soltanto tettonica, ma soprattutto stratigrafia e paleogeografia, è indubbio l' interesse che presenta lo studio e la distinzione di tali formazioni intese essenzialmente quali facies diverse di sedimenti terrigeni pervenuti in un dato bacino di sedimentazione; con l' aggiunta, per le argille scagliose, della loro peculiarietà derivante dalle sollecitazioni tettoniche cui sono state sottoposte e dalle quali ne è derivata la caratteristica *tecnica* della scagliosità.

In una mia recente nota a proposito della tettonica della Sicilia (7) ho cercato di formulare una ipotesi di lavoro tendente a spiegare quella

---

[1]) Coloro che hanno avuto occasione di occuparsi del Flysch terziario della Albania e di alcune zone della Grecia, sanno bene come sia possibile individuare vaste e regolari strutture che nulla hanno di caotico e che, di fronte alla esecuzione dei sondaggi di ricerca petrolifera, nulla avevano del comportamento tecnico delle argille scagliose. Del resto, anche in Italia meridionale ed in Sicilia è dato osservare vasti complessi di flysch paleogenico in giacitura abbastanza regolare.

situazione in base alla distribuzione dei materiali terrigeni paleogenici nelle varie parti del bacino sedimentario, ed al loro diverso comportamento nel corso delle sollecitazioni tettoniche subìte. Condizioni analoghe a quelle riscontrate per la Sicilia si verificano un pò dappertutto nelle serie paleogeniche dell' Italia meridionale, ove è dato osservare che ben diverso è il comportamento delle *vere argille scagliose*, che pure sono presenti, intese come sedimento di acque profonde, e quello del flysch (generalmente argilloso-arenaceo) inteso quale deposito marginale, o di arcipelago.

Non è il caso di ripetere qui che al termine *flysch* deve essere assegnato esclusivamente un significato di facies; e quasi non si comprende perchè lo si voglia estromettere dalla terminologia corrente, mentre in realtà serve a caratterizzare assai bene talune serie di terreni, largamente diffusi, ai quali sono frequentemente connessi problemi di geologia applicata di notevole importanza.

Tali terreni presentano, difatti, caratteristiche così particolari da renderli inconfondibili; ivi compresi taluni aspetti enigmatici che, specialmente nel passato, hanno richiamato l' attenzione degli studiosi, quali ad esempio le modalità e l' ambiente della sedimentazione, la quasi assoluta mancanza di resti fossili macroscopici, l' abbondanza delle impronte problematiche, ecc.

Parecchi anni addietro, occupandomi di ricerche petrolifere in Albania, quale Capo Geologo dell' Aipa (Azienda Italiana Petroli Albania), ho avuto occasione di studiare sul larga scala il flysch albanese e quello dello Epiro, nei più vari aspetti e su aree assai vaste, e nel sottosuolo attraverso molte migliaia di metri di carota estratte dai sondaggi. Mi è stato così possibile acquisire conoscenze dirette sul terreno, e maturare idee che molto mi sono poi servite per valutare alcune situazioni dell' Italia meridionale che presentano, con quelle dell' altro versante adriatico e jonico, analogie così spiccate da consentire qualsiasi estrapolazione di concetti.

Nell' ambito di tale mia attività ho avuto necessariamente la possibilità di consultare molta bibliografia sull' argomento, venendo anche a conoscenza di alcune interessanti idee di R. Zuber (10), il noto geologo polacco specializzato nella geologia del petrolio con particolare riguardo alle zone carpatiche ove, come è noto, affiora abbondantemente il flysch terziario intensamente piegato e dislocato in scaglie (Skibas).

Ai tempi in cui R. Zuber rendeva note le sue osservazioni (1901), alcuni aspetti enigmatici di quelle serie sedimentarie spingevano gli studiosi a cercare di comprendere soprattutto il meccanismo della sedimentazione; problema questo che riveste, ovviamente, notevole importanza anche perchè le serie in facies di flysch vengono riconosciute per varî periodi geologici; il che deve presumibilmente rappresentare il risultato di un complesso di condizioni ambientali e climatiche, o meglio ancora paleogeografiche, ripetentisi nel tempo e nello spazio.

Ora, come per molti altri aspetti, condizioni e caratteristiche delle più varie serie geologiche, così anche per il flysch l'osservazione dei fenomeni che si svolgono attualmente sotto i nostri occhi, può aiutarci a comprendere quelli che nel passato geologico hanno presieduto alla formazione di tali complessi sedimentari.

R. Zuber, che a ragione della sua attività geo-petrolifera aveva avuto occasione di recarsi nel Venezuela, ha descritto alcuni fenomeni da lui osservati nelle zone costiere di quelle regioni; e poichè mi pare che le sue osservazioni siano assai interessanti, e che le idee da lui espresse e le conclusioni alle quali giungeva, diano perfettamente conto di molte delle caratteristiche presentate dai terreni in facies di flysch, comprese quelle che apparivano enigmatiche, così ritengo utile portare a conoscenza degli studiosi quanto egli ebbe a scriverne, anche perchè ho ragione di pensare che tale fonte bibliografica sia assolutamente ignota agli studiosi italiani [1]).

Per vedere come si sia potuto avere quello speciale tipo di sedimentazione, seguiamo dunque idealmente lo Zuber nelle regioni tropicali, ove — a suo avviso — si può osservare la natura all'opera nel lavoro di accumulazione dei terreni in facies di flysch [9].

« L'anno scorso — scriveva il geologo polacco — ho trascorso qualche « mese (dall'aprile al luglio 1900) nell'Isola di Trinitad e nel Venezuela « (di cui due interi mesi nell'isoletta di Pedernales, presso il delta dello « Orenoco) e mi sono potuto assicurare non solo che in queste regioni tro- « viamo il vero flysch antico, ma che nel mare poco profondo prospiciente « il delta dell'Orenoco, la formazione del flysch avviene tuttora.

« Anzitutto bisogna tenere presente che queste regioni hanno un clima « tipicamente equatoriale, vale a dire, in generale, un periodo relativamente « secco da novembre a maggio, ed un periodo piovoso con eccezionali « inondazioni, burrasche, calme complete ed uragani.

« Fra l'Isola di Trinitad ed il prossimo continente americano si estende « il golfo di Paria, chiuso a nord da alte montagne rocciose; dagli altri lati, « invece, le rive sono basse ed attraversate da numerosi fiumi dei quali i « più grandi sono i bracci del delta dell'Orenoco. Questi fiumi formano, « specialmente alla loro foce, delle paludi salate coperte da una vegetazione « straordinariamente rigogliosa. In queste golfo il flusso e riflusso della « marea sono relativamente forti, e la corrente di flusso arriva molto a « monte nei fiumi suddetti.

« Lungo la riva nord del golfo l'acqua è abbastanza limpida e per questa « ragione è solo qui che coralli e grandi molluschi vivono in gran numero. « A sud, invece, l'acqua è sempre più torbida, ed a qualche miglio di

---

[1]) Mi pare anche Tercier (vedi bibliograria), che si è occupato, pochi anni addietro, del problema, ignori le idee dello Zuber.

« distanza dalla foce dell' Orenoco assume l' aspetto di una fanghiglia di « color bruno-giallastro e persino rosso.

« Vediamo ora in quali condizioni avviene la sedimentazione.

« Passeggiando lungo la riva del mare a nord-ovest della città di Guira, « durante il riflusso della marea, vediamo, prima di tutto, una massa di sabbia « pura con qualche intercalazione di banchi di ciottoli arrotondati, di diversa « grandezza e di diversa origine, che provengono dalle montagne vicine.

« Il mare burrascoso e — in questa insenatura — limpido, rigetta « molte piante, resti di coralli e conchiglie. Tutti questi frammenti riman- « gono quindi rapidamente polverizzati fra i banchi di ciottoli rotolati, al « punto tale che ben raramente qualche resto si conserva intatto nella « sabbia. Un pò più lontano, si deposita un' argilla grigia, nella quale ca- « dono, dalle rive scoscese, rocce diverse di ogni grandezza.

« Questa argilla proviene dagli strati più recenti delle vicinanze ed è « apportata sia dal mare che dai fiumi vicini. Abbiamo, dunque, dinanzi « a noi, la formazione di strati arenacei, di strati di argilla plastica con « massi isolati, una grande quantità di resti organici di origine vegetale « ed animale e, di tanto in tanto, se pure raramente, qualche fossile « ben conservato.

« Tutto ciò rappresenta, però, fatti molto ben conosciuti e non ci « spiega, ancora, tutte le particolarità del flysch.

« Alla foce di un qualsiasi importante braccio dell' Orenoco (al Capo « Pedernales, presso l' isola omonima, ad esempio), possiamo però osser- « vare fenomeni particolari. Questo braccio, con una larghezza alla foce di « 1500 m., durante il periodo secco presenta acqua salata fino a qualche « chilometro a monte, e la salinità diminuisce un poco solo verso agosto « o settembre. La corrente di flusso e riflusso è molto forte, specialmente « durante la luna nuova e la luna piena.

« A circa 5 miglia di distanza dalla foce, un cordone litorale poco « profondo circonda quasi tutto il delta, che è tagliato da stretti e profondi « canali. Verso est, fino all' isola Trinitad, tutta una serie di rocce sabbiose « e quarzose emergono dal fiume al di là dell' isola di Pedernales. Queste « rocce forniscono il materiale per la formazione delle sabbie, dei ciottoli, « e dei blocchi. Il fiume trasporta una enorme massa di fango e di sabbia « fine depositandoli in parte lungo il suo corso, in parte nel mare, sì da « potere osservare le seguenti particolarità.

« La velocità irregolare e la mutevole direzione delle correnti, il cam- « biamento di livello, le irregolarità del fondo e gli ostacoli in continua « trasformazione, fanno sì che, contemporanente, nelle diverse insenature, « e spesso a più riprese, si depositano alternativamente sabbia e fango « argilloso o marnoso.

« Un fondo molto piatto, una oscillazione importante del livello della « acqua, provocata a volte dal flusso e riflusso, a volte dal vento o anche

« dal cambiamento di stagione, secca o piovosa, fanno sì che grandi su-
« perfici si trovino durante qualche ora, qualche giorno, settimana o mese,
« talvolta sotto l' acqua, e successivamente emersi. Allora si possono vedere
« miriadi di granchi, vermi ed altri esseri viventi nel fango molle; masse
« di gas delle paludi sfuggenti dal fango; tracce di passi di uccelli e
« tracce di rettili rampanti; masse di sostanza organica in rapida decom-
« posizione per effetto dell' umidità e della temperatura tropicale; il dis-
« seccamento rapido e la fessurazione delle superfici esposte al vento ed
« un nuovo ricoprimento da parte di nuovi sedimenti portati da una nuova
« inondazione, da cui un continuo livellamento delle irregolarità, come le
« ondulazioni parallele ed interferenziali della superficie dei sedimenti, dei
« rami, degli animali ecc. che si disorganizzano.

« Nessuno che abbia una volta sola osservato le manifestazioni pre-
« cedentemente descritte, può dubitare che ci si trovi in presenza di una
« dimostrazione autentica della formazione dei caratteri enigmatici del
« flysch, come il deposito di strati sottili di sabbia, di argilla, o di marna;
« la formazione dei geroglifici, delle tracce di ondulazione, la struttura
« concoidale ed altre particolarità di questa formazione.

« Gettiamo ora uno sguardo sulla vita organica di queste regioni.
« Nelle acque fangose vivono milioni di pesci e, nel fango della riva, molti
« molluschi. Ciò nonostante, i loro resti si conservano molto raramente nei
« sedimenti. La cosa può essere facilmente spiegata ricordando che questi
« esseri vivono nutrendosi di altri animali, e che in un clima così caldo si
« decompongono rapidamente.

« I coralli, come sappiamo, non possono vivere in quest' acqua fangosa
« e spesso salmastra; le ostriche e gli altri altri molluschi vi deperiscono
« e muoiono gli uni dopo gli altri. Le piante marine si spingono abbon-
« dantemente lontano dalla riva, il maggiore e più resistente apporto di
« sostanza organica è sicuramente fornito ai sedimenti da questa vegeta-
« zione caratteristica, incredibilmente rigogliosa. Sempre, ed in particolar
« modo dopo le inondazioni, si possono vedere, non solo sul fiume, ma anche
« in pieno mare, tronchi di alberi e rami giganteschi, frutti galleggianti
« a lungo fino a che non si imbibiscono di acqua e, appesantiti dal fango
« che li ricopre, cadono al fondo per essere poi ricoperti dai sedimenti,
« nei quali — a seconda delle condizioni locali — si carbonizzano o si
« pietrificano.

« Una sottile melma vegetale entra in notevole misura nella composi-
« zione dei sedimenti, soprattutto di quelli argillosi e mi sembra che la
« formazione degli strati bituminosi si deve essere determinata seguendo
« questa via, se non in maniera assoluta, almeno in gran parte.

« Ed ecco spiegata la ragione della mancanza dei fossili nelle serie
« del flysch.

« Vediamo ora se vi sono ragioni di credere che la formazione del « flysch nelle provincie così dette mediterranee (alle quali appartengono « anche i Carpazi a causa di comuni particolarità geologiche) sia stata ac- « compagnata da un clima tropicale, poichè non vi è bisogno di dimostrare « che tale clima, unitamente alle considerazioni geologiche, è la causa « principale perchè le condizioni sedimentarie e la vita organica siano « effettivamente tali come ho descritto precedentemente.

« Così, le ricerche ben conosciute di Neumay sulla fauna triassica e su « quella cretacea, ed in seguito le ricerche di Essinghaus ed altri sulla « flora cretacea ed eocenica, hanno dimostrato esaurientemente che in « tutte le provincie mediterranee si è dovuto avere in tale epoca, e per « conseguenza durante tutto il tempo della formazione del flysch, un clima « tropicale. La presenza di argille rossastre in qualche livello del flysch « (colore che è particolare delle formazioni depositatesi in tale clima) con- « valida questa ipotesi.

« Dalle osservazioni citate risulta quindi che i terreni carpatici si sono « dovuti formare in un mare interno poco profondo, fra un arcipelago di « isole più antiche, con l'aiuto di numerosi ed importanti fiumi e di un « clima tropicale. »

Tale, dunque, la descrizione dal vero dei fenomeni che debbono avere presieduto alla deposizione dei terreni in facies di flysch, per spessori talori assai considerevoli, apparentemente anche per migliaia di metri, che noi però non possiamo sempre valutare con esattezza a ragione dei disturbi tettonici che talvolta non consentono una attentibile ricostruzione del profilo. La monotonia delle alternanze litologiche é, di solito, tale da far rimanere perplessi, per le deduzioni che se ne possono trarre circa la persistenza di una data situazione ambientale.

Posta nei termini sopraindicati, la sedimentazione dei terreni che lo Zuber non esita a riconoscere come vero e proprio flysch, si è indotti a ritenere che condizioni analoghe a quelle attualmente esistenti alla foce dell'Orenoco, si siano verificate nelle nostre regioni, nel corso del terziario inferiore, là dove ora vediamo potenti complessi flyschioidi coprire le aree comprese fra i rilievi calcarei, o nelle quali si osservono lembi di calcari mesozoici emergere dal flysch o — come vorrebbero taluni studiosi — galleggiare su questo.

Si tratta, in definitiva, di invocare la teoria delle cause attuali e, d'altro canto, di esaminare sul terreno se i depositi del flysch si trovino effettivamente in tali condizioni di giacitura da potere senz'altro riconoscere che la loro formazione debba essere avvenuta in una situazione paleogeografica da arcipelago, ai margini di un bacino sedimentario geosin-

clinalico, o comunque ai margini di un bacino dotato di intenso movimento di subsidenza.

Per condurre una tale analisi, sia pure sommaria ed a solo scopo orientativo, è anzitutto necessario notare che nelle nostre regioni, parlando di flysch dobbiamo essenzialmente intendere il flysch terziario,. paleogenico; questo, difatti, appare ampiamente diffuso in superficie, al contrario di quanto avviene, invece, per il flysch mesozoico, soprattutto triassico, il quale, pur affiorando in lembi molteplici ma localizzati (per essere in in gran parte ricoperto dai sedimenti posteriori) non consente una attendibile ricostruzione dell' aspetto geografico delle zone nelle quali ne avvenne la sedimentazione.

Naturalmente, nell' accennare a tale argomento si vuole soprattutto porre un tema di ricerca agli studiosi dell' Italia meridionale, i quali potranno quindi raccogliere tutti gli elementi per la dimostrazione dell' ipotesi di lavoro. Ma bisogna tener presente che occupandosi di tale problema è indispensabile considerare le cose in maniera obiettiva, con la mente libera dalla seduzione psicologica che possono esercitare talune recenti teorie le quali, se pure risultano senz' altro accettabili in alcuni casi, appaiono invece prive di qualsiasi fondamento in altre situazioni. Così, se è vero che il denudamento dei versanti, sia esso tettonico o per azione di altri agenti, ha avuto una notevole influenza nell' accumulare in basso i materiali argilloso-arenacei, prevalentemente plastici, che ammantellavano i fianchi delle montagne mesozoiche, non mi sembra d' altra parte necessario consentire — a meno di trovarne le prove inconfutabili — che il flysch terziario si estendesse, come ad es. voleva De Lorenzo (2, 3, 4), per ogni dove al di sopra delle formazioni mesozoiche; il che potrebbe essere erroneamente interpretato nel senso che nel terziario inferiore nulla emergesse di quella che doveva poi diventare la catena appenninica meridionale.

A confutare una tale idea, mi pare che basti tener presente la lacuna stratigrafica corrispondente all' Eocene inferiore il quale, come è noto è assente nell' Italia meridionale [1]); e frequenti sono i casi in cui si può osservare la superficie morfologica presentata dal mesozoico quando si determinò la trasgressione meso-eocenica; il che val quanto dire che il mesozoico, già piegato, aveva subìto un primo periodo di continentalità. Ora, se è vero che i successivi sedimenti in facies di flysch, dell' Eocene medio e superiore e dell' Oligocene, possono avere determinato un così sentito movimento di subsidenza da portare alla completa sommersione dei rilievi calcarei mesozoici, non bisogna dimenticare che ciò potrà essere eventual-

[1]) Secondo le mie ricerche personali sembrerebbe, invece, che nelle Murge Baresi sia presente una sottile formazione calcarea attribuibile all' Eocene inferiore.

mente avvenuto solo dopo che tali terreni si erano già depositati per cospicui spessori.

Bisogna poi tener presente che almeno per la zona delle Murge baresi e delle Serre salentine, i sedimenti del terziario inferiore non si debbono essere mai deposti in misura cospicua. Tali zone, difatti, dalle quali ora li troviamo o completamente assenti, o in spessori assai ridotti, costituivano l'avampaese durante il Paleogene; ed anche nell'ambito della così detta Fossa Bradanica, nella quale il Pliocene sembra giacere direttamente sul cretaceo, le cose non dovettero essere diverse.

Ma anche se vogliamo ammettere una situazione tale che alla fine dell'Oligocene tutti i rilievi mesozoici delle zone appenniniche meridionali si siano venuti a trovare al di sotto del livello marino, ciò non contrasta con l'idea che, almeno nel corso dell'Eocene il mare penetrasse fra le isole calcaree, ricevendone i materiali unitamente a quelli provenienti da zone continentali ora scomparse, quali la Tirrenide [1]).

Sarebbe pertanto di grande interesse lo studio micropaleontologico dei lembi di flysch ancora esistenti sui rilievi montuosi, onde determinarne l'età e portare in tal modo efficaci elementi per l'esatta conoscenza della situazione.

Vi è, poi, da tener presente un altro fatto assai importante che parla appunto in favore della deposizione del flysch in un paesaggio da arcipelago, e comunque in un momento in cui le formazioni mesozoiche erano già sorte dal mare per effetto orogenetico. Difatti, mentre nelle zone più a nord si nota continuità di sedimentazione dal mesozoico al paleogene, senza la interposizione di un periodo di continentalità (vedi la successione, con passaggio insensibile, scaglia rosa-scaglia cinerea), nell'Appennino meridionale tale continuità generalmente manca, ed i sedimenti paleogenici risultano deposti su di una superficie morfologica interessante il cretaceo che doveva essere rimasto lungamente emerso prima della trasgressione meso-eocenica, che portò alla sedimentazione di calcari organogeni, nei quali alle microfaune tipiche si associano le rudiste rimaneggiate.

La sommersione completa dei rilievi mesozoici, per subsidenza pro-

---

[1]) Del resto, anche De Lorenzo (2) dopo aver descritto i materiali facenti parte delle serie del flysch, scrive: " Dall'esame di questi elementi costitutivi di tali conglomerati si deve concludere che le terre capaci di fornire una così ricca serie di rocce ai depositi del flysch dovevano essere costituite analogamente agli attuali monti della Calabria: essere, cioè, essenzialmente granitiche. con lembi sienitici, filoni di porfidi e porfiriti, dicchi di diabase e melafiri, lenti di diabasi ed anfiboliti, con mantelli e stratificazioni di scisti granatiferi, gneiss, micascisti e argilloscisti: il tutto essendo qua e là ricoperto dai terreni mesozoici. Tali terre dovevano emergere dal mare eocenico sotto forme di isole e di penisole, fiancheggianti a levante ed a ponente e intramezzanti anche lo attuale asse della catena appenninica ecc.„.

vocata dall' intenso accumularsi dei sedimenti sia nella zona di arcipelago, e soprattutto nelle aree centrali del bacino, si sarebbe quindi avuta solo nell' Oligocene, il quale ora potrebbe risultare ancora rappresentato da quei lembi salvatisi alla denudazione tettonica ed all' azione degli agenti superficiali, che ancora compaiono, secondo De Lorenzo (2, 3, 4), in corrispondenza delle faglie che interessano le masse calcaree.

Tale mi sembra debba essere stata la situazione all' epoca della sedimentazione del flysch nell' Italia meridionale, a meno che non si voglia pensare che nell' Eocene inferiore il mesozoico di tali regioni non fosse stato ancora interessato da un certo corrugamento, e si presentasse come una zolla tabulare, appena emergente dal mare ed in questo successivamente affondata per il sopravvenire della trasgressionne meso-eocenica.

Ma, a parte queste considerazioni teoriche, basta avere avuto occasione di visitare talune zone dell' Italia meridionale, per convincersi della fondatezza di queste idee.

A chi risalga la valle del Sele, o si porti nelle zone del Matese e dell' Alburno o del Cervati, o si rechi nel Cilento, o visiti l' alta valle dello Agri o quella dell' Ofanto ecc., ovunque è possibile osservare che il flysch paleogenico sta a riempire le depressioni morfologiche del substrato calcareo mesozoico [1]).

Nè, come già accennato, deve intendersi quale prova contraria quella fornita da isolati affioramenti di flysch paleogenico in talune zone elevate dei massicci o delle catene calcaree. De Lorenzo (4) ha chiaramente messo in evidenza i lembi di sedimenti flyschioidi, salvati alle forze distruttive, ancora presenti a quote abbastanza elevate, generalmente in corrispondenza delle faglie di distensione che suddividono le formazioni mesozoiche in una serie di blocchi disposti a gradinata. Tali affioramenti indicano, evidentemente, un livello del mare paleogenico, pur senza dimostrare che quel mare abbia sempre effettivamente ricoperto per ogni dove le nostre regioni.

D' altra parte è da tenere presente che proprio una circostanza che si verifica nel flysch paleogenico — intendo dire la presenza di blocchi calcarei, anche di notevolissime dimensioni inglobati in quei sedimenti — sta appunto a dimostrare che da quel mare emergessero grandi e piccole isole di terreni mesozoici, e secondo De Lorenzo (l. c.) anche paleozoici

---

[1]) Non mi pare sia più il caso di parlare della possibilità che i rilievi mesozoici emergenti dal flysch stiano a rappresentare degli esotici o addirittura i resti di una coltre di ricoprimento. Le ricerche di Behrmann (1) hanno dimostrato come sia da escludere non solo l' ipotesi di un carreggiamento delle masse calcaree su quelle flyschioidi, ma anche l' idea della *esoticità* di taluni rilievi calcarei apparentemenți galleggianti sul Flysch. Di fondamentale importanza è il ritrovamento di *L. marginata* e *L. morgani* nei calcari con rudiste della Cresta del Gallo presso Caposele.

e cristallini, dalle quali si staccavano i blocchi stessi. Questi, precipitando nel bacino sedimentario, rimanevano inglobati nel materiale clastico in via di deposizione. Si tratta di quei blocchi cui taluni AA. attribuiscono il nome di *esotici,* i quali ultimi, invece, sono una caratteristica tutta propria delle *vere argille scagliose,* ovunque esse siano presenti, come si può magnificamente osservare, ad es., al margine adriatico dell' Appennino pugliese e lucano.

R. Zuber, con lo studio dei fenomeni attuali, ha chiaramente dimostrato il perchè della presenza di tali masse calcaree, e più recentemente Tercier (8), in via del tutto indipendente è pervenuto agli stessi risultati in base alle osservazioni sul flysch delle Alpi.

Ritengo opportuno insistere su questo punto in quanto al termine « esotici » viene normalmente attribuito il significato di massa estranea al materiale nel quale si trova inglobata (argille scagliose tipiche o flysch) per effetto di un meccanismo di sradicamento da un substrato sul quale le argille scagliose (od il flysch) siano passati nel loro movimento tangenziale a seguito delle sollecitazioni tettoniche, qualunque sia la causa di queste (scivolamento gravitativo, denudazione dei versanti, movimento orogenetico inteso alla maniera di Rittmann con inghiottimento della zona centrale della geosinclinale, ecc.).

In realtà, accettando il concetto che masse grandi e piccole di calcari (o di altro materiale) possano staccarsi dalle coste, e scivolare sul fondo pervenendo a grande distanza dalla riva, e quindi anche a profondità notevoli, si potrebbe benissimo pensare che anche molti degli esotici inglobati nelle vere argille scagliose, siano pervenuti a queste, — nelle zone profonde dei bacini sedimentari — con analoghe modalità [1]), almeno quando l' età degli esotici è dimostrabile quale più antica delle argille scagliose inglobanti, il che praticamente si verifica quasi sempre.

Certo è che là dove si osserva il flysch riempire le depressioni morfologiche frammezzo alle masse calcaree mesozoiche, l' idea che i presunti esotici altro non siano che blocchi di calcare caduti nel mare paleogenico mi pare senz' altro accettabile. D' altra parte non è infrequente il caso che piccoli rilievi calcarei emergenti dal flysch (giudicati ad un primo esame

---

[1]) E' noto che le recenti ricerche oceanografiche, e specialmente quelle indirizzate allo studio dei sedimenti di zone profonde degli oceani, hanno dimostrato che, anche per effetto di semplici moventi sismici, il materiale depositatosi originariamente sulla piattaforma continentale può scivolare e risedimentarsi a profondità anche notevole. Naturalmente mi pare che con ciò non si possa accettare senz' altro il concetto che il fenomeno della risedimentazione possa verificarsi ripetutamente, per un gran numero di volte, quasi ritmicamente, come sarebbe richiesto dalle moderne vedute sulla risedimentazione del "macigno„.

come sradicati) risultino invece connessi con le masse calcaree in posto, come ha messo in evidenza, per la zona di Contursi (Salerno), F. Ippolito (6).

Naturalmente mi sembra non sia neppure il caso di discutere le idee di taluni studiosi che hanno voluto vedere tutte le masse calcaree dello Appennino meridionale « galleggiare » sul flysch e sulle argille scagliose o per erronea interpretazione di alcuni fenomeni di sovrascorrimento delle masse calcaree mesozoiche sul terziario od anche per errata datazione di taluni sedimenti, come è avvenuto per la zona di Caposele in prov. di Avellino, per la quale Behrmann (l. c.) ha opportunamente chiarito la situazione.

Tutto, quindi, sembra dimostrare che il flysch paleogenico dell' Italia meridionale si sia sedimentato in una zona di arcipelago, o ai margini di un bacino geosinclinalico, in contrasto, quindi, con quanto deve essere avvenuto per le *vere* argille scagliose che con le loro caratteristiche stanno ad indicare un ambiente di sedimentazione notevolmente profondo.

Del resto, anche i reperti paleontologici del nostro flysch parlano in favore di profondità assai limitate dei bacini sedimentari; nummuliti e lepidocicline sono difatti riconosciuti quali organismi caratterizzanti acque calde e poco profonde (5), e così pure gli altri microforaminiferi che è dato rinvenire in taluni livelli grossolanamente arenacei del flysch.

Le ripple-marks e le svariatissime impronte problematiche, nonchè i conglomerati che si intercalano frequentemente alle arenarie, alle marne ed argille scistose che rappresentano i termini prevalenti nelle nostre serie flyschiodi, sono tutti elementi che denotano limitata profondità dell' ambiente di sedimentazione.

Le sostanziali differenze esistenti fra flysch ed argille scagliose sono talmente evidenti che mi pare non sia più il caso, quindi, di accomunare sedimenti di così diverso significato paleogeografico, anche se talvolta fra di essi esistono vaghe analogie tettoniche. Queste, del resto, sono, come già accennato, soltanto apparenti non potendosi certo porre su di uno stesso piano l' assoluta e generale caoticità delle argille scagliose, con la tettonica complessa sì, ma quasi sempre cartografabile in scala adatta, delle serie del flysch.

A questo proposito mi pare ovvio che nelle carte geologiche ufficiali convenga distinguere le due facies, almeno fin quando possibile data la scala del rilevamento, ricorrendo almeno all' uso di chiare leggende ed utilizzando adatti segni convezionali, da apporre sul colore fondamentale, a seconda che si tratti dell' una o dell' altra formazione o (come talvolta può anche presentarsi) di una loro mescolanza.

NOTA — Il presente lavoro era già alle stampe quando ha visto la luce una interessantissima nota di F. Ippolito e V. Cotecchia (*Le frane ed i dissesti nelle medie valli dell'Agri e del Sinni in Basilicata*. Geotecnica, Anno I, n. 2, pag. 45. Milano, 1954) nella quale è messo in rilievo che, parlando di argille scagliose, si intende dare a quel termine un contenuto *strettamente tecnico*. Una tale precisazione mi sembra essere della massima importanza, in quanto il comportamento *tecnico* delle vere argille scagliose, non può non essere sostanzialmente diverso, di solito, da quello del flysch argilloso-arenaceo paleogenico.

Napoli, Istituto di Geologia, Paleontologia e Geografia fisica dell'Università, aprile 1954.

BIBLIOGRAFIA

1. Behrmann R. B., *Die Faltenbögen des Apennins und ihre palaeogeographische Entwicklung*. Abh. Gesells. Wissen. Göttingen, math. phys. Kl., III Folge, Heft. 15. Berlino, 1936.
2. De Lorenzo G., *Geologia dell'Italia meridionale*. Nuova ediz. a cura di G. D'Erasmo. Editrice Politecnica S. A., Napoli, 1937.
3. — — *Le montagne mesozoiche di Lagonegro*. Atti R. Acc. Sc. Fis. e Mat., ser. 2ª, vol. VI. Napoli, 1894.
4. — — *Studi di geologia nell'Appennino meridionale*. Atti R. Acc. Sc. Fis. e Mat., ser. 2ª, vol. VIII. Napoli, 1896.
5. Gallovay J. J., *A manual of foraminifera*. Bloomington, Ind., 1933.
6. Ippolito F., *Contributi alle conoscenze geologiche sull'Italia meridionale*. Atti XLII Riun. Soc. It. Progr. Sc. Roma, 1949.
7. Lazzari A., *Nuova ipotesi per una interpretazione strutturale della Sicilia* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Soc. Naz. Sc. Lettere e Arti, Sez. 4, vol. XX. Napoli, 1953.
8. Tercier J., *Le flysch dans la sédimentation alpine*. Eclogae Geol. Helv., vol. 40, n. 2. Basilea, 1947.
9. Zuber R., *O pochodzenin fliszu* (*Ueber die Enstehung des Flysches*). Kosmos, VII, p. 232-243. Lemberg, 1901.

Ricerche geochimiche su alcune bauxiti di terra d' Otranto

Nota del dott. **Vincenzo Minieri**, *presentata dal socio* **G. D' Erasmo**

(Adunanza del dì 5 giugno 1954)

Sunto. — Vengono studiati, dal punto di vista geochimico e stratigrafico, alcuni giacimenti di bauxite esistenti nelle zone di Minervino di Lecce ed Uggiano la Chiesa, nella penisola Salentina. In tale regione si ripete il classico motivo della giacitura della roccia in sacche e depressioni di una superficie cretacica interessata da fenomeni carsici nel corso di un lungo periodo di continentalità. Dopo alcune considerazioni relative al ciclo geochimico del titanio, nel quadro della genesi della bauxite, si esclude, in base ad osservazioni morfologiche e stratigrafiche, che la deposizione dei materiali dovette aver luogo in facies palustre o lacustre, come recentemente è stato osservato per gli adunamenti bauxitici di S. Giovanni Rotondo nel Gargano.

1. — *Premessa.*

Come è noto, recenti studi del prof. Cavinato [1]) sui giacimenti di bauxite italiani (Istria e Puglia) hanno consentito di formulare una nuova ipotesi interpretativa, basata sulla giacitura e sulle relazioni stratigrafiche tra i depositi e la natura dei complessi sedimentari ai quali sono connessi, circa la genesi e la particolare *facies* sedimentaria di quella interessante roccia. Le notevoli e moderne ricerche hanno messo in evidenza le strette analogie esistenti, dal punto di vista geologico, geochimico e geofisico, tra le varie regioni italiane, nelle quali è stato possibile constatare la presenza della bauxite in giacimenti di notevole estensione, sfruttabili o già sfruttati dalle industrie per la preparazione dell' alluminio.

Se si tien conto che su tale interessante fenomeno la letteratura è così vasta e varia e per giunta strettamente legata a quella che riguarda processi litologici affini o addirittura identici ad esso, tanto che non è facile sovente orientarsi al fine di ricavarne dati definitivi e conclusivi, bisogna riconoscere che le vedute dell' autore inquadrano il problema, essenzialmente dal punto di vista geochimico, sotto aspetti assai chiari e positivi. E questo anche in accordo, in linea generale, con quanti interpretano la genesi della bauxite come un prodotto di normali processi eso-

[1]) Cavinato A., *Geologia e genesi delle bauxiti*. Memorie dell' Istit. geol. dell' Università di Padova, vol. XV. Padova, 1947-48. Id., *Il deposito di bauxite di S. Giovanni Rotondo*. L' industria mineraria, anno IV, n. 11, pagg. 497-503. Roma, 1953.

geni di decomposizione delle rocce, sottoposte alla intensa azione degradatrice degli atmosferili, verificatasi tanto in epoche geologiche antichissime che in altre più recenti.

In complesso i punti salienti che l'autore indica nei suoi lavori sono i seguenti: 1) i depositi di bauxite si rinvengono in depressioni del suolo, rappresentate in gran parte da superfici interessate da fenomeni carsici durante un lungo periodo di continentalità, e di solito indicanti orizzonti di trasgressione; 2) pur essendo ascrivibili a varie età, essi si rinvengono più frequentemente tra il cretaceo superiore e le prime assise dell'eocene; 3) rappresentano una *facies* di depositi sedimentari palustre o lacustre, anche se non si esclude quella di depositi marini; 4) derivano dalla deposizione di idrossidi cristallini o colloidali di alluminio, di ferro, di titanio, di idrosilicati di tali cationi, accompagnati da impurezze varie; 5) gl'idrossidi costituiscono il residuo insolubile di processi desilicatizzanti verificatisi in massima parte per degradazione epigenetica lateritica, o argillosa, o caolinica ecc. su tutta la superficie terrestre, nel tempo e nello spazio.

Tali conclusioni, se collimano con quelle indicate da altri studiosi, come ad esempio con quelle relative ai rapporti di giacitura ed alle condizioni ambientali intraviste dal D'Ambrosi [1]) per i depositi di bauxite dell'Istria, si discostano invece dalle vedute di quell'autore e di altri [2]) più propensi ad ammettere, in relazione alla genesi della roccia, un fenomeno analogo a quello che conduce attualmente alla formazione della terra rossa, considerandola come residuo fossile delle impurezze derivanti dalla degradazione atmosferica delle pile calcaree mesozoiche, ed infine completamente antitetica a quanti, come il Lotti [3]), ritennero di richiamare, per la formazione di quella roccia, l'azione delle acque e dei vapori termali di origine profonda su rocce silicatiche di antichi depositi, giacenti sotto l'enorme coltre sedimentaria calcarea.

Premesse queste brevi considerazioni di carattere generale, ricorderò infine che dalle conclusioni del prof. Cavinato scaturisce un criterio pratico di ricerche applicabile anche per le regioni italiane della Puglia e della Campania, come si può rilevare dalle indagini eseguite dall'autore sulle bauxiti di S. Giovanni Rotondo, il cui giacimento richiama per i

---

[1]) D'Ambrosi C., *Intorno alla genesi del saldame, della bauxite e di alcuni depositi di minerali di ferro dell'Istria.* Boll. Soc. Geol. Ital., vol. LXI, pag. 411. Roma, 1943.

[2]) Gortani M., *Terra rossa, bauxite, laterite.* Giorn. di Geol. Pratica, anno XI, fasc 1°. Parma, 1913.

[3]) Lotti A., *Ipotesi sulle relazioni d'origine del saldame, delle bauxiti e di alcuni minerali ferrosi in Istria.* L'Industria mineraria, gen. 1940, X ann., n. 1. Faenza, 1940.

suoi caratteri ambientali, geologici e stratigrafici, quanto egli aveva già precedentemente indicato.

Il presente lavoro riguarda appunto lo studio geochimico delle bauxiti provenienti dalla zona fra Minervino di Lecce ed Uggiano La Chiesa, nella penisola Salentina, ed ha lo scopo di precisare se anche per quei depositi ricorrono le condizioni stratigrafiche, geologiche ed ambientali di quelli del Gargano, con particolare riguardo altresì ai rapporti esistenti tra i pisoliti tipicamente bauxitici ed il cemento rossastro che li unisce a guisa di conglomerato, e marginalmente ai presumibili legami tra queste formazioni e la terra rossa tipica di quella regione.

Le ricerche chimiche sono state eseguite nel laboratorio dell'Istituto di Geologia, di recente attrezzato, sopra materiale che mi è stato cortesemente affidato in istudio dal prof. Antonio Lazzari, al quale desidero esprimere i sentimenti della mia gratitudine.

2. — *Notizie geologiche.*

Le ricerche più cospicue sui depositi di bauxite in Puglia e sui rapporti stratigrafici di essi con le formazioni geologiche della regione sono dovute, com'è noto, al Crema [1]). Le analogie esistenti tra la costituzione geologica della penisola Salentina e quella di altre regioni bauxitifere italiane e dell'Istria in particolare, richiamarono l'attenzione di quell'autore sulla presumibile presenza della bauxite in terra d'Otranto e altrove, ed egli difatti potette constatarne la esistenza in giacimenti di insospettata estensione.

Dalle osservazioni dirette condotte nelle varie località della Puglia, il Crema potè desumere interessanti conclusioni che riguardano sopratutto la apparenza, la giacitura e la composizione della roccia, del tutto simili a quelle delle altre bauxiti italiane, ed altresì le relazioni stratigrafiche secondo cui la presenza dei depositi appare strettamente connessa alla facies

---

[1]) Tra i numerosi lavori di quest'autore, vedi principalmente i seguenti: Crema C., *La bauxite in Puglia.* Boll. R. Ufficio geol. d'Italia, vol. LVI, n. 3. Roma, 1931. — Id., *Le risorse in minerali d'alluminio delle due sponde Adriatiche.* Atti della Soc. Ital. per il Progresso delle Scienze, XXII Riunione (Bari, ottobre 1933), vol. II, pagg. 120-144. Roma, 1934. - Id., *Recenti ritrovamenti di bauxite in Puglia.* Atti della Soc. Ital. per il Progresso delle Scienze, XVIII Riunione (Firenze), vol. II, pag. 140. Roma, 1930. — Id., *La bauxite in terra d'Otranto.* La Miniera Ital., XII. Roma, 1928. - Id., *Nuove zone bauxitiche in terra d'Otranto.* Ibidem, XIII. Roma, 1929.

di scogliera dei calcari turoniani del sopracretacico. Di tali sedimenti sono pressochè costituite per la totalità le Serre Salentine e qui la bauxite si presenta di solito in forma di ammassi di colore rosso cupo, a superfici esterne talvolta di tinta giallastra, dovuta alla normale degradazione operata dagli agenti atmosferici.

L'opportunità di estendere minuziose ricerche sulla presenza della bauxite in Puglia fu suggerita al Crema dalla segnalazione di alcune particolari terre rosse fatta da De Giorgi [1]), da Dell' Erba [2]) e da Galdieri [3]). Quest' ultimo aveva descritto taluni depositi noti col nome locale di " bolo ad uddìe ", li aveva distinti geneticamente dalla comune terra rossa, considerandoli di età miocenica o premiocenica, e sopratutto aveva indicato l'elevato tenore in allumina che i pisoliti o " uddìe " presentavano, tanto da richiamare per tale carattere e per l'aspetto la bauxite.

Dei pisoliti raccolti ad Uggiano la Chiesa, località che particolarmente interessa il presente studio, il Crema riporta, con altre, l'analisi eseguita nel Laboratorio dell' Ufficio geologico. I tenori percentuali sono i seguenti:

SiO_2	4.86
Al_2O_3	53.70
Fe_2O_3	27.89
TiO_2	1.92
P.F.	12.19

La bauxite di cui mi interesso, come è già stato riferito, proviene dalla località predetta (sulla strada per Minervino di Lecce). Presenta il solito aspetto litoide a grossi pisoliti, taluni di colore rosso, altri più giallastri, cementati a guisa di conglomerato, da una massa terrosa intensamente colorata in rosso. Le sezioni qui di seguito riportate, come si rileva dalle figure 1, 2 e la pianta relativa (fig. 3), indicano la giacitura della roccia in relazione ai calcari compatti cretacici, ove, in sacche di antica erosione, si rinvengono i pisoliti bauxitici, taluni cementati (fig. 4), taluni altri sparsi in superficie e mescolati a terra rossa.

La situazione stratigrafica quindi, com'è noto, richiama il solito ca-

---

[1]) De Giorgi C., *La terra rossa nel Leccese.* Boll. R. Com. geol. d' Italia, vol. VII, pag. 294. Roma, 1876. — Id., *Note geologiche sulla provincia di Lecce,* vol. I, pag. 82 e 187. Lecce, 1876.

[2]) Dell' Erba L., *Costituzione lito-geologica di una zona barese ad alabastri calcarei.* Atti R. Istit. d' Incor. di Napoli, vol. LXIX, pag. 6. Napoli, 1917.

[3]) Galdieri A., *Sul bolo di terra d' Otranto.* Ann. R. Sc. Sup. d' Agric. di Portici, vol. XI. Portici, 1913. — Id., *L' origine della terra rossa.* Ibidem, pag. 37. Portici, 1913.

rattere intravisto per molti giacimenti della roccia, vale a dire una superficie carsificata in fase di continentalità in seguito all'emersione del cretacico, durante la quale i calcari turoniani furono sottoposti a quella intensa erosione che creò depressioni e tasche, nelle quali si depositarono,

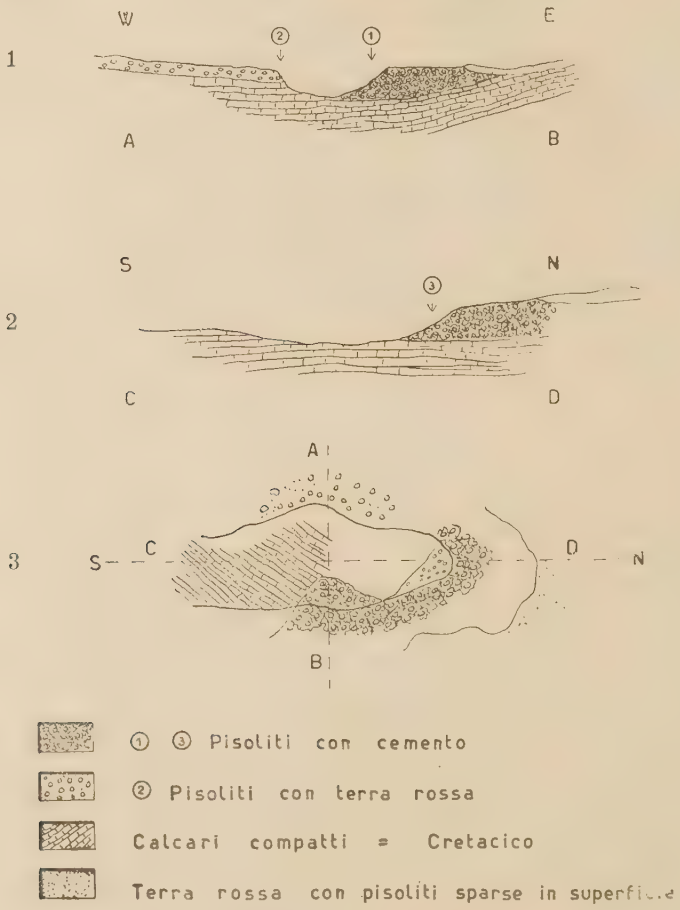


Fig. 1. — Sezione trasversale dello scavo di provenienza del materiale bauxitico.
Fig. 2. — Sezione longitudinale dello scavo.
Fig. 3. — Pianta indicante la roccia calcarea in posto e i vari depositi di terra rossa e di bauxiti pisolitiche.

sempre durante la fase di emersione, i prodotti cristallini o colloidali che originarono successivamente le bauxiti. Manca nella zona di Minervino ed Uggiano la coltre calcarea eocenica che ricoprì e chiuse le sacche bauxitiche dei calcari mesozoici, presumibilmente perchè qui la sommersione

eocenica non assunse il carattere di notevole intensità, come è stato possibile osservare per altre zone della Puglia.

Recenti studi [1]) ancora in corso, ad esempio, hanno permesso di apportare una revisione stratigrafica anche per le Murge baresi, ove è stata segnalata la presenza dell' Eocene, rappresentato da calcari ad Alveoline di aspetto paleogenico, i quali chiudono le tasche carsiche dei calcari cretacici.

D' altra parte è noto altresì che tutta la penisola Salentina, emersa dal mare mesozoico, è stata interessata assai poco tanto da movimenti verticali quanto da rilevanti ingressioni marine post-secondarie, anche se è possibile rinvenire, nell' area in cui essa è compresa, termini stratigrafici più recenti rispetto al complesso calcareo cretaceo, che ne rappresenta pressochè la quasi totalità.

Tali condizioni paleogeografiche, pertanto, dovranno essere tenute presenti ai fini del presente studio, per poter risalire alle caratteristiche ambientali in cui vennero a trovarsi le zone nelle quali attualmente si rinvengono i depositi di roccia bauxitica. La superficie calcarea, che nelle sacche erose racchiude gl' idrossidi di alluminio e ferro, dovette essere erosa ed accidentata nella lunga fase di continentalità cui fu sottoposta dopo l' emersione cretacica e quindi, analogamente a quella istriana, su di essa si crearono le condizioni favorevoli per la deposizione dei materiali, che generarono posteriormente gli adunamenti di bauxite.

3. — *Ricerche chimiche.*

Per quanto la composizione chimica delle bauxiti oscilli notevolmente entro limiti talvolta assai larghi, considerato che ai fini degli aspetti geochimici del problema era necessario avere dati da mettere in relazione con il cemento dei pisoliti e con le formazioni analoghe (terra rossa, bolo) esistenti nella regione, sono stati sottoposti ad analisi vari campioni di pisoliti, da quelli più rossicci a quelli più giallastri, e si è proceduto successivamente alle analisi del cemento e della terra rossa. I risultati analitici riassuntivi sono riportati nelle tabelle successive.

---

[1]) Lazzari A., *Sulla probabile presenza dell' Eocene nelle Murge baresi.* Boll. Soc. dei Naturalisti di Napoli, vol. LXI. Napoli, 1952.

	Bauxite gialla	Bauxite rossa	Bauxite rossa
SiO_2	0.68	1.20	2.40
TiO_2	4.03	2.62	2.98
ZrO_2	0.44	0.19	0.21
Al_2O_3	53.55	53.50	53.80
Fe_2O_3	26.58	24.39	25.66
MnO	0.12	0.12	0.12
CaO	2.13	3.98	0.70
H_2O^-	0.72	0.90	0.69
H_2O^+	12.08	13.22	12.45
Totale	100.33	100.12	100.01

	Cemento	Cemento	Terra rossa
SiO_2	27.08	18.35	39.30
TiO_2	1.24	0.48	0.47
ZrO_2	0.08	0.03	0.03
Al_2O_3	42.60	48.10	25.75
Fe_2O_3	13.20	9.14	9.70
MnO	0.10	0.10	0.10
MgO	ass.	ass.	3.50
CaO	1.10	0.75	4.20
K_2O	ass.	ass.	0.40
Na_2O	0.64	0.60	0.98
H_2O^-	2.16	1.94	0.58
H_2O^+	11.80	20.15	12.96
Cl^-	0.40	0.42	—
CO_2	—	—	2.46
Totale	100.40	100.06	100.43

Le analisi sono state eseguite con i comuni metodi. Dopo disgregazione con carbonato sodico è stata insolubilizzata la silice, pesata e trattata successivamente con HF ed H_2SO_4, per controllarne la purezza. Nel filtrato

sono stati precipitati con ammoniaca il ferro e l'alluminio e dopo separazione dosato ponderalmente il ferro e per differenza l'alluminio. Dopo eliminazione dei sali ammonici dai filtrati riuniti, è stato precipitato e pesato il calcio.

Il titanio è stato dosato per via colorimetrica e nella stessa soluzione precipitato e poi pesato lo zirconio. L'acqua è stata ricercata con i metodi normalmente usati.

I dati analitici riportati nelle precedenti tabelle consentono di stabilire anzitutto che le bauxiti prese in esame sono povere di SiO_2 e di CaO, ma contengono un'ottima percentuale di Al_2O_3, Fe_2O_3 e relativamente di TiO_2. Il cemento, che unisce i pisoliti tipicamente bauxitici, deve considerarsi della stessa natura, anche se presenta una maggiore quantità di silice, il cui arricchimento può ritenersi presumibilmente passivo.

Fig. 4. — Pisoliti bauxitiche incluse nel « cemento bauxitico ».

L'elevato tenore di TiO_2, fatto questo già noto per i depositi degli idrolizzati, permette di richiamare alcune considerazioni interessanti relative al ciclo geochimico del titanio in superficie [1],[2]. L'elemento predetto si mostra particolarmente incline ad associarsi al Fe^{+3}, dal cui idrossido

---

[1] Pieruccini R., *Contributo alla conoscenza della distribuzione del titanio (e del vanadio) in alcuni sedimenti dell'Appennino settentrionale toscano.* Atti Soc. Tosc. di Sc. Nat., Memorie, s. A, vol. LVIII. Pisa, 1951.

[2] Rankama K. e Sahama Th. G., *Geochemistry.* Chicago, 1949.

viene trascinato, come suol dirsi, allo stato di sol colloidale, e tale azione viene ancor più esaltata quando è presente, come nelle bauxiti, l'idrossido di alluminio. Tenuto conto che il comportamento del sol titanifero rientra nei normali fenomeni di flocculazione dei colloidi in relazione alla presenza di particolari elettroliti, quale ad esempio il NaCl, nella sua deposizione associata ai due idrossidi predetti, intervengono, oltre che i fattori riguardanti la grandezza e la forma delle particelle sospese, anche il particolare ambiente entro cui si verifica il deposito dei prodotti che originano la bauxite. E cioè la fenomenologia carsica, nel corso della quale o successivamente le acque convoglianti sono povere di acido carbonico (caduta di concentrazione di CO_2 connessa alla dissoluzione del calcare) e quindi poco solubilizzanti per il titanio, il quale infine, in quell'ambiente arido, si stabilizza nella forma di acido metatitanico, $TiO(OH)_2$, che sembra essere la meno asportabile in superficie.

Tali aspetti geochimici precedentemente esposti confermano l'ipotesi genetica assunta nelle ricerche sulle bauxiti da parte di Cavinato [1]), nel senso che è possibile il convogliamento degli idrossidi di alluminio, ferro, titanio ecc. da parte delle acque e la successiva rideposizione in un ambiente favorevole qual'è quello di una superficie di trasgressione, sottoposta ad intensa erosione carsica durante un lungo periodo di continentalità, e sulla quale inoltre si possono verificare le condizioni climatiche, ambientali, fisiche e geologiche favorevoli, anche per concentrazione idrogenionica, alla sedimentazione ed ai successivi arricchimenti dei materiali bauxitici.

4. — *Conclusioni geologiche.*

In relazione alle condizioni di giacitura dei depositi di bauxite in Terra d'Otranto, già esposte e chiarite con le considerazioni stratigrafiche innanzi dette, e riportate nei profili geologici già indicati, desidero esporre ora alcune osservazioni di carattere morfologico, in base alle quali si possa poi desumere se anche per le zone di Minervino e di Uggiano si verifichino quelle condizioni stratigrafiche che indurrebbero a richiamare, per la bauxite di quelle zone, una facies lacustre o palustre, intravista dall'autore già citato per i depositi di S. Giovanni Rotondo nel Gargano.

E' anzitutto da tener presente il fatto che in tutta la Provincia di Lecce, quelli che localmente sono chiamati " Uddìe ", e di cui s'interessò il Galdieri [2]), si trovano di solito sparsi nella terra rossa, e un pò dap-

[1]) L. c.
[2]) L. c.

pertutto. Ciò starebbe a significare quindi rimaneggiamenti successivi del materiale; probabilmente poi lo stesso bolo potrebbe essere connesso geneticamente alla terra rossa, della quale potrebbe considerarsi residuo più sottile e più fino, per cui non è facile fissarne l'età di formazione.

Il materiale bauxitico, cementato o non, deve invece ritenersi in giacitura originaria e la natura analoga dello stesso cemento confermerebbe tale ipotesi. Occorre perciò opportunamente distinguere la prima formazione dalla seconda.

Le tasche bauxitiche, entro le quali si rinviene la roccia, sono tutte scavate nei calcari cretacici, che, com'è noto, sono permeabili, e che rappresentano quindi il letto dei depositi. A Minervino e ad Uggiano, mancano i calcari di tetto eocenici o miocenici, come invece si riscontra altrove, il che pertanto indicherebbe che la sommersione marina, successiva al Mesozoico, non assunse qui caratteri di sedimentazione assai imponenti, anche se non si possa escludere del tutto, dato che termini paleogenici si rinvengono tanto sulla fascia costiera, quanto in zone relativamente vicine.

In tutta la penisola Salentina, ed in particolare a Minervino di Lecce, non sembra, dalla morfologia, che si siano verificate condizioni stratigrafiche tali da consentire formazioni lacustri o palustri, e quindi è da escludersi una facies di tal genere.

In definitiva, per le zone in esame si ripete il motivo di una superficie cretacica, erosa per fenomeni carsici durante una lunga fase di continentalità, nelle cui depressioni furono convogliati e poi depositati — per fenomeni chimici, fisici e meccanici — gl'idrossidi cristallini o colloidali di alluminio, ferro, titanio ecc., ma non è agevole indicare se la loro deposizione sia avvenuta in regime palustre o lacustre, mancando dati stratigrafici e morfologici tali da poterne giustificare con esattezza l'ammissibilità. Posteriormente al cretacico, e con più probabilità nel Miocene medio, dovette esservi una ingressione marina, di tipo epicontinentale, che stabilizzò e difese le formazioni bauxitiche estese in tutta la Terra d'Otranto. A tale età si possono presumibilmente pertanto ascrivere i giacimenti della penisola Salentina.

Napoli, Istituto geo-paleontologico dell'Università, maggio 1954.

Tempo e Spazio nel pensiero di Leopardi

Nota del socio ordinario **Giuseppe De Lorenzo**

(Pervenuta all' Accademia nel dì 1 settembre 1954)

Sunto. – Questa Nota vuole essere ancora un' aggiunta a quella su *Le concezioni cosmiche di Leopardi*, presentata all' Accademia nel dì 8 novembre 1952, per dichiarare meglio quel che il Leopardi pensasse sui problemi trascendenti, o metafisici, dell' eternità del tempo ed infinità dello spazio.

Nella mia nota su *Le concezioni cosmiche di Leopardi*, pubblicata nel Rendiconto di quest' Accademia del 1952 e ristampata nel volume *Scienza d' Occidente e Sapienza d' Oriente*, Napoli, editore R. Ricciardi, 1953, io scrivevo, che Leopardi nel campo della filosofia teoretica fu soprattutto inspirato dall' empirismo inglese e dal sensismo francese del seicento e del settecento, e poco o nulla influenzato dall' idealismo tedesco di Kant e dei suoi seguaci; che egli, giovinetto, non aveva, probabilmente, conosciuto per via diretta, ma solo indirettamente, attraverso la Stael: come ne fa fede quel che egli scriveva nel suo *Zibaldone*, il 5 ottobre 1821: « Quali sono le grandi scoperte di Kant, caposcuola ecc. ecc.? Credo che niuno lo sappia, nemmeno i suoi discepoli. » Invece egli amava proclamare la concordanza della sua filosofia con le antiche filosofie, anche se tra loro discordi, quali la socratica primitiva, la cirenaica, la stoica, la cinica, oltre l' accademica e la scettica. E così dal suo primitivo empirismo e sensismo giungeva allo scetticismo ed al relativismo, che doveva poi informare la sua filosofia teoretica, fondata sull' assioma, che egli aveva già fissato nello stesso *Zibaldone*, il 22 dicembre 1820: « Non vi è quasi altra verità assoluta se non che *tutto è relativo*. » Ma più tardi, il 14 dicembre 1826, per una immprovvisa folgorazione del suo genio, egli scriveva, nello stesso *Zibaldone*: « Il nostro intelletto è il solo luogo, dove il tempo e lo spazio come tante altre cose astratte, esistono indipendentemente e per sè medesimi. » Ed a ragione l' eminente esegeta ed editore degli scritti leopardiani, Francesco Moroncini, nella sua edizione dei *Canti*, pubblicata presso il Sandron nel 1917, riportò tale pensiero quasi come un commento all' idillio *L' Infinito*, composto dal Leopardi, poco più che ventenne, nella primavera del 1919, a Recanati.

Ma quel pensiero, scritto sette anni dopo la composizione de *L' Infito*, contiene, *in nuce*, tutta l' essenza dell' estetica trascendentale, con cui si apre la *Critica della ragion pura* di Kant Conviene, quindi, di esami-

nare, se in quel frattempo Leopardi non fosse giunto ad una conoscenza diretta del pensiero di Kant, che veniva a confermare, con ferrei ragionamenti filosofici, la sua vaga intuizione giovanile.

Kant aveva pubblicato nel 1781 la prima edizione e nel 1787 la seconda della sua *Kritik der reinen Vernunft*. Poco dopo ne uscirono una traduzione latina ed alcune esposizioni e traduzioni francesi, incomplete ed inesatte, per la profondità del pensiero e l'astrattezza dello stile del sommo filosofo. In Italia solo tra il 1820 ed il 1822 ne apparve a Pavia, nella *Collezione dei classici metafisici*, la traduzione fattane dal chirurgo Vincenzo Mantovani; la quale precede, così, quasi d'un secolo la magistrale traduzione italiana di Giovanni Gentile e G. Lombardo-Radice, pubblicata dall'editore Laterza a Bari. La traduzione del Mantovani, benchè sgraziata e sgrammaticata ed orrida di forma, come dice il Gentile, servì a far conoscere i pricipii della filosofia di Kant in Italia: vi attinse il Rosmini, se ne avvalse largamente il Galluppi, e fu probabilmente conosciuta anche da Leopardi. Così si spiega, come egli, in una nota dello *Zibaldone* del 17 aprile 1828, cercasse di scusare « chi in metafisca cercasse più di pensare che di leggere; chi pretendesse di essere metafisico, senza aver letto o inteso Kant. » Tale scusa egli chiedeva, naturalmente, anche e principalmente per sè; che proprio in quel tempo, disincantato dalla poesia, volgeva la mente alla filosofia; come aveva pubblicamente dichiarato nella sua canzone *Al Conte Carlo Pepoli*, composta a Bologna nel marzo 1826:

Io tutti
Della prima stagione i dolci inganni
Mancar già sento, e dileguar dagli occhi
Le dilettose immagini, che tanto
Amai, che sempre infino all'ora estrema
Mi fieno, a ricordar, bramate e piante.
Or quando al tutto irrigidito e freddo
Questo petto sarà, nè degli aprichi
Campi il sereno e solitario riso,
Nè degli augelli mattutini il canto
Di primavera, nè per colli e piagge
Sotto limpido ciel tacita luna
Commoverammi il cor; quando mi fia
Ogni beltate, o di natura o d'arte,
Fatta inanime e muta; ogni alto senso,
Ogni tenero affetto, ignoto e strano;
Del mio solo conforto allor mendico,
Altri studi men dolci, in ch'io riponga
L'ingrato avanzo della ferrea vita,
Eleggerò. L'acerbo vero, i ciechi

Destini investigar delle mortali
E dall' eterne cose; a che prodotta,
A che d' affanni e di miseria carca
L' umana stirpe; a quale ultimo intento
Lei spinga il fato e la natura; a cui
Tanto nostro dolor diletti o giovi;
Con quali ordini e leggi a che si volva
Questo arcano universo, il qual di lode
Colmano i saggi, io d' ammirar son pago.
In questo specolar gli ozi traendo
Verrò · che conosciuto, ancor che tristo,
Ha suoi diletti il vero.

Su tale disposizione d' animo ed indirizzo della mente di LEOPARDI doveva congenialmente agire in modo potente la nuova concezione del mondo di KANT, anche se indirettamente e parzialmente conosciuta. Essa, che rappresenta uno dei più grandi voli dello spirito umano, fu giustamente paragonata, nel 1818, da SCHOPENHAUER, nel primo volume della sua opera, *Die Welt als Wille und Vorstellung*, all' operazione della cataratta, che dà la vista ai ciechi; od a quella di un distruttore, che abbatte tutti gli idoli della teologia e della metafisica: per cui il MENDELSSOHN lo chiamò onnischiacciante, *Alleszermalmer;* od alla voce di uno svegliato, che desta i dormienti dal sonno e dal sogno della vita. Ed è singolare, che questi sono propio i titoli, che gli Indiani della valle della Gange diedero al loro grande illuminatore del mondo, GOTAMO SAKYAMUNI: gli avversari brâhmani chiamandolo distruttore, *bhûnaho;* ed i seguaci buddhisti, invece, qualificandolo come il grande medico, *mahâbhisakkha*, e lo Svegliato, *Buddha*.

Ma in che consiste quest' opera di KANT: di aver distrutto errori, falsità e vane fantasie; di aver dato la vista ai ciechi; e di aver destato i dormienti dal sonno e dal sogno della vita? Consiste nell' aver dimostrato, con la *Critica della ragion pura*, che nel mondo v' è un *quid* trascendente, a noi ignoto ed inconoscibile, che egli chiama *noumenon* o *cosa in sè*; di cui solo la manifestazione fenomenica è da noi percepita mediante le forme dello *spazio*, del *tempo* e della *causalità*, inerenti *a priori* alla intuizione del nostro intelletto: per cui la filosofia di KANT è, al tempo stesso, secondo il lato da cui la si guarda, un idealismo trascendentale ed un realismo empirico. SCHOPENHAUER, che fu il più diretto e più devoto discepolo di KANT, ne adottò in pieno la concezione, con *Il mondo quale volontà e rappresentazione;* completandola, però, con l' identificare l' inconoscibile *cosa in sè* di KANT con l' accessibile *volontà*: non la nostra volontà individuale e razionale, ma la volontà universale di vivere e divenire, la quale anima tutti i mondi, inorganici ed organici; e che è, in fondo, quella che LUCREZIO chiama *sitis vitai* ed il BUDDHA SAKYAMUNI semplicemente *sete*, *tanhâ;* di cui i buddhisti anelano all' estinzione, o

nirvana. Ma, lasciando da parte questo ultrakantismo, buddhistico o schopenhaueriano, vediamo quali punti di contatto e se e quale influenza può aver avuto l'idealismo trascendentale di KANT, e la sua teoria dell'appercezione *a priori* del tempo e dello spazio, su gli analoghi pensieri sullo spazio e sul tempo, espressi, in prosa ed in poesia, da LEOPARDI.

L'esperienza, dice KANT nella *Critica della ragion pura*, è, fuor di dubbio, il primo prodotto, che dà il nostro intelletto, mettendosi ad elaborare la materia greggia delle sensazioni. Ed è, appunto perciò, il primo ammaestramento, e nel suo procedere fonte così inesauribile di nuovi insegnamenti, che la vita concatenata di tutte le future generazioni non avrà mai difetto di nuove conoscenze, che possano essere raccolte su questo terreno. Tuttavia, è ben lungi dall'essere l'unico campo, nel quale il nostro intelletto venga circoscritto. Essa ci dice bensì ciò che è, ma non che così e non altrimenti debba essere. Per ciò appunto non ci dà neanche una vera universalità, e la ragione, così avida di queste specie di conoscenze, è dalla esperienza più eccitata che soddisfatta. Tali conoscenze universali, che abbiano a un tempo il carattere della necessità intrinseca, debbono essere indipendenti dall'esperienza, chiare e certe per sè stesse; quindi prendono il nome di *conoscenze a priori;* laddove, al contrario, ciò che scaturisce esclusivamente dall'esperienza è, come si suol dire, conosciuto solo a *posteriori* od empiricamente. Ora è chiaro ed è sommamente degno di nota, che mescolate alle nostre esperienze si trovano conoscenze, che debbono avere le loro origini *a priori*, le quali forse servono solamente a tenere insieme le nostre rappresentazioni sensibili. Giacchè se dalle prime si toglie anche tutto ciò che appartiene ai sensi, rimangono tuttavia alcuni concetti originari e taluni giudizi, prodotti da questi concetti, che debbono esser sorti assolutamente *a priori*, indipendentemente dall'esperienza, poichè essi fan sì, che dégli oggetti, che appaiono ai sensi, si possa o almeno si creda di poter dire più che non potrebbe insegnare la semplice esperienza, e poichè vi sono affermazioni, che per mezzo di essi acquistano vera universalità e rigorosa necessità, ciò che non potrebbe dare la semplice conoscenza empirica. Tali conoscenze *a priori* sono appunto quelle dello spazio e del tempo. Si può affermare la *realtà empirica* dello spazio, rispetto a tutta l'esperienza esterna possibile, e nondimeno l'*idealità trascendentale* di esso, ossia che lo spazio non è più nulla, appena prescindiamo dalla condizione della possibità di ogni esperienza, e lo assumiamo come qualcosa che stia a fondamento delle cose in sè stesse. Similmente, se si può dire, che tutti i fenomeni sono determinati *a priori* nello spazio e secondo relazioni spaziali; si può anche, partendo dal principio interno dell'intelletto, dire universalmente: tutti i fenomeni in generale, cioè tutti gli oggetti dei sensi, sono nel tempo, e stanno tra di loro necessariamente in rapporti di

tempo. Il tempo è dunque unicamente condizione soggettiva della nostra umana intuizione, e non è nulla in se stesso, fuori del soggetto. In ciò dunque consiste l'idealità trascendentale del tempo, secondo la quale esso non è niente, ove si prescinda dalle condizioni soggettive delle intuizioni sensibili, e non può essere considerato nè come sussistente nè come inerente agli oggetti in sè stessi senza rapporto alla nostra intuizione. Dentro queste conoscenze *a priori* della nostra mente è, dunque, contenuto tutto quello, che noi possiamo sapere e dire del tempo e dello spazio.

La nullità e l'eternità del tempo, la vacuità e l'infinità dello spazio e l'illusorietà della vita e del mondo erano state, però, già prima di KANT intuite da molti pensatori, antichi e moderni, occidentali ed orientali: se anche non dimostrate con la precisione, quasi matematica, di KANT. Basti ricordare, tra tanti: l'*uomo sogno di ombra*, σκιᾶς ὄναρ ἄνθρωπος, della ottava *Pythia* di PINDARO; la *vita che è solo un'ombra ambulante, life's but a walking shadow*, del *Macbeth* di SHAKESPEARE; l'idealismo di PLATONE e di BERKELEY; non dimenticando Giordano BRUNO, che, per dimostrare la nullità del tempo, scrive, che quel che abbiamo vissuto è nulla, quel che viviamo è un punto, e quel che abbiamo a vivere non è ancora un punto, il quale insieme sarà e sarà stato. In Oriente le coincidenze sono ancora più evidenti. Il primo verso del famoso *Dhammapadam* buddhistico suona quasi come un assioma kantiano: « Dalla mente sono originate le cose, dalla mente dirette, dalla mente formate: *Manopubbangamâ dhammâ manosetthâ manomayâ.* » Tale assioma è ripetuto, e reso ancor più evidente, dallo stesso BUDDHA SAKYAMUNI in diversi suoi discorsi, con immagini e parole di somma precisione: « Io vi dico, che in questo corpo alto otto spanne, intrinsecato di sensazioni, percezioni, concezioni e conscienza, è contenuto il mondo, il divenire del mondo, il dissolversi del mondo, e la via che mena al dissolversi del mondo. » Bene a ragione, quindi, Karl Eugen NEUMANN, il geniale traduttore dei discorsi del BUDDHA, scriveva, sfidando le obiezioni storicistiche di Benedetto CROCE, che tali discorsi provengono invero dal sesto secolo prima di CRISTO, ma fanno a volte l'impressione, come se appartenessero al sesto secolo dopo KANT e SCHOPENHAUER.

Se ora, dopo questo *excursus*, ritorniamo a LEOPARDI, e propriamente a quel suo pensiero, riportato al principio di questa Nota e citato anche dal MORONCINI, nella sua edizione dei *Canti*, a commento dell'idillio *L'Infinito*, possiamo, sulla scorta di maggiori elementi, esaminare quali affinità e quali connessioni vi siano tra l'idealismo trascendentale di KANT ed il pensiero di LEOPARDI sulla natura del tempo e dello spazio. Quel pensiero non sta per sè, ma è il corollario di tutta una pagina, scritta nello *Zibaldone*, a Recanati, il 14 dicembre 1826. Pertanto è necessario leggerla per intero. Perciò, eccola qui riprodotta integralmente:

« Il tempo non è una cosa. Esso è un accidente delle cose, e indi-

pendentemente dalla essenza delle cose è nulla; è uno accidente di questa esistenza, o piuttosto è una nostra idea, una parola. La durazione delle cose che sono è il tempo: come 7200 battute di un pendolo da oriuolo sono un' ora, la quale ora però è un parto della nostra mente, e non esiste, nè da se medesima, nè nel tempo, come membro di esso, non più di quel che essa esistesse prima dell' invenzione dell' oriuolo. Insomma l' esser del tempo non è altro che un modo, un lato, per dir così, del considerar che noi facciam la esistenza delle cose che sono, o che possono o si suppongono poter essere. Medesimamente dello spazio. Il nulla non impedisce che una cosa che è, sia, stia, dimori. Dove nulla è, quivi niuno impedimento è, che una cosa non vi stia o non vi venga. Però il nulla è necessariamente luogo. E' dunque una proprietà del nulla esser luogo; proprietà negativa, giacchè anche l' esser di luogo è negativo puramente e non altro. Sicchè, come il tempo è un modo o un lato del considerar la esistenza delle cose, così lo spazio non è altro che un modo, un lato, del considerar che noi facciamo il nulla. Dove è nulla, quivi è spazio, e il nulla senza spazio non si può dare. Per tanto è manifesto che, eziandio fuori degli ultimissimi confini dell' universo esistente, v' è spazio, poichè nulla v' è. E se qualche cosa potesse essere o creata o spinta di là da quegli estremi confini, troverebbe luogo; che è quanto dire non troverebbe nulla che la impedisse di andarvi o di starvi. La conclusione si è, che tempo e spazio non sono in sostanza altro che idee, anzi nomi. E quelle innumerabili e immense questioni agitate dalla origine della metafisica in qua, dai primi metafisici d' ogni secolo, circa il tempo e lo spazio, non sono che logomachie, nate da malintesi, e da poca chiarezza d' idee e poca facoltà di analizzare il nostro intelletto, che è il solo luogo, dove il tempo e lo spazio, come tante altre cose astratte, esistano indipendentemente e per sè medesimi, e sian qualche cosa. »

Ora questa pagina fu scritta da Leopardi nel dicembre del 1826, ossia sei anni dopo che erano usciti i primi volumetti della traduzione del Mantovani della *Critica della ragion pura;* che egli quasi certamente dovè conoscere, perchè ne è chiara la derivazione di alcuni concetti e perfino di talune espressioni. Ad onore e gloria del nostro altissimo poeta bisogna però aggiungere, che, anche se egli aveva conosciuto l' estetica trascendentale di Kant, questa trovò in lui, per affinità elettiva, un terreno propizio, per mettervi radice e svilupparsi. Perchè Leopardi già sette anni prima, nel 1819, quando, appena ventenne, non aveva di Kant altra conoscenza che, forse, per sentita dire, aveva composto quel mirabile idillio de *L' Infinito*, in cui è contenuto, in germe, tutto il suo pensiero sull' idealità trascendente del tempo e dello spazio. Rileggiamolo, per persuadercene.

Sempre caro mi fu quest' ermo colle,
E questa siepe, che da tanta parte
Dell' ultimo orizzonte il guardo esclude.
Ma sedendo e mirando, interminati
Spazi di là da quella, e sovrumani
Silenzi, e profondissima quiete
Io nel pensier mi fingo; ove per poco
Il cor non si spaura. E come il vento
Odo stormir tra queste piante, io quello
Infinito silenzio a questa voce
Vo comparando: e mi sovvien l' eterno,
E le morte stagioni, e la presente
E viva, e il suon di lei. Così tra questa
Immensità s' annega il pensier mio:
E il naufragar m' è dolce in questo mare.

Ed invero KANT non poteva augurarsi, per la sua estetica trascendentale del tempo e dello spazio, una migliore rappresentazione poetica di quella contenuta nei quindici versi di questa sublime poesia. Un altro poeta, anzi il poeta dei poeti, SHAKESPEARE, faceva esprimere da *Amleto* un analogo ordine di pensieri: « O Dio, io potrei essere confinato in un guscio di noce, e ritenermi un re di spazio infinito, se non avessi cattivi sogni: *O God, I could be bounded in a nut-shell, and count myself a king of infinite space, were it not that I have had bad dreams.* » Con questo in più, su LEOPARDI, che la mente dell' uomo, chiusa in un guscio di noce, quale può essere il cranio, può concepire lo spazio infinito, ma non sfugge ai cattivi sogni del dolore del mondo.

Resta il merito grande di LEOPARDI, di avere col suo genio fuso il pensiero del filosofo con l' ispirazione del poeta, facendoli cristallizzare nel purissimo gioiello de *L' Infinito.*

Sulla V_8^7 dell'S_{11} contenente tutte le $V_6^{2(n+m)}$ rispondenti alle curve di ordine n e classe m dell'S_2

Nota del socio **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 6 novembre 1954)

Sunto. In una nota precedente [1]) abbiamo costruito un modello proiettivo dell'ente algebrico ∞^1, già dato con una curva dell'S_2 di ordine n e classe m, con gli $\infty^1 S_5$ generatori di una $V_6^{2(n+m)}$ dell'S_{11}, ed abbiamo notato come tale V_6 descrive in S_{11} una V_8^7 al variare della curva nell'S_2. Tale V_8^7 è in corrispondenza biunivoca senza eccezioni, mediante i suoi $\infty^3 S_5$ generatori, con le ∞^3 coppie punto-retta appartenentisi dell'S_2.

In questa nota si studia tale V_8^7 assegnandone due tipi di equazioni parametriche, mettendo in evidenza che contiene pure un sistema ∞^5 di S_3 direttori e come, in particolare, si ottengono le equazioni parametriche di una delle $V_6^{2(n+m)}$ rispondente ad una curva di S_2.

8. *Studio della* V_8^7.

Nel n° 6 della nota citata in [1]) è stata introdotta la varietà V_8^7 dove varia la $V_6^{2(n+m)}$ che rappresenta in S_{11} il prolungamento triduale di una curva c'' dell'S_2 complesso, di classe m, già studiata nel n° 4. Riprendiamo ora lo studio di detta V_8^7 mantenendo le notazioni dei numeri precedenti 1 , . . , 7.

Detti Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 quattro punti di π_1 , π_2 , π_3 , π_4 con le stesse coordinate (x , y , z) ed M_2 , M_1 altri due punti di π_2 e π_4 con le stesse coordinate $(x' , y' , 0)$, distinti dai due punti Q_2 e Q_4, l'S_5 congiungente tali sei punti sarà uno degli $\infty^3 S_5$ generatori della V_8^7 (n' 6, 7). Le coordinate $(x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , z_1 , z_2 , z_3 , z_4)$: di tali punti nell'$S_{11}$ congiungente i quattro piani π_j, sono, pertanto:

---

[1]) N. Spampinato. *Su alcune varietà dell'* S_{11} *determinate dall'algebra triduale come sottoalgebra dell'algebra dei numeri doppio-biduali.* Rend. Accad. Sc. fis. e matem. della Soc. Naz. di Sc., Lett. ed Arti in Napoli, serie 4ª, vol. XXI. 1954. – Nella presente nota si usano le notazioni già introdotte in questa citata.

$$Q_1\,(x\,,0\,,0\,,0\,,y\,,0\,,0\,,0\,,z\,,0\,,0\,,0)$$
$$Q_2\,(0\,,x\,,0\,,0\,,0\,,y\,,0\,,0\,,0\,,z\,,0\,,0)$$
$$M_2\,(0\,,0\,,x\,,0\,,0\,,0\,,y\,,0\,,0\,,0\,,z\,,0)$$
$$Q_3\,(0\,,0\,,0\,,x\,,0\,,0\,,0\,,y\,,0\,,0\,,0\,,z)$$
$$Q_4\,(0\,,x'\,,0\,,0\,,0\,,y'\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0\,,0)$$
$$M_4\,(0\,,0\,,0\,,x'\,,0\,,0\,,0\,,y'\,,0\,,0\,,0\,,0).$$

Le equazioni parametriche dell'S_5 congiungente tali 6 punti, con i parametri $\rho_1\,,\ldots,\rho_6$, sono:

$$[S_5]\qquad \begin{cases} x_1 = \rho_1 x & x_3 = \rho_4 x \\ x_2 = \rho_2 x + \rho_3 x' & x_4 = \rho_5 x + \rho_6 x' \\ y_1 = \rho_1 y & y_3 = \rho_4 y \\ y_2 = \rho_2 y + \rho_3 y' & y_4 = \rho_5 y + \rho_6 y' \\ z_1 = \rho_1 z & z_3 = \rho_4 z \\ z_2 = \rho_2 z & z_4 = \rho_5 z \end{cases}$$

Si osservi che, per es., le prime sei equazioni rappresentano, con i tre parametri $\rho_1\,,\rho_2\,,\rho_3$, nell'$S'_5 = \pi_1\,\pi_2$, l'S_2 intersezione dell'S_5 generatore della V_8^7 considerato con S'_5.

Essendo le due terne $(x\,,y\,,z)$ e $(x'\,,y'\,,z')$, definite a meno di un fattore possiamo supporre, per es., eguali fra di loro x ed x', e precisamente ad una delle ρ_j, per es. alla ρ_6. Posto allora:

$$x = x' = \rho_6\,,\quad y = \rho_7\,,\quad z = \rho_8\,,\quad y' = \rho_9\,,$$

supposto il punto $(x'\,y'\,z')$ appartenente alla retta $z=0$] e sostituendo nelle $[S_5]$ si otterranno le equazioni parametriche della V_5^3 [contenente tutte le $V_5^{3(m'+n)}$ rispondenti alle curve c^n del piano complesso]. Tale V_5^3 avrà le seguenti equazioni parametriche:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \rho_1\,\rho_6 & x_3 = \rho_4\,\rho_6 \\ x_2 = \rho_2\,\rho_6 + \rho_3\,\rho_6 & x_4 = \rho_5\,\rho_6 + \rho_6^2 \\ y_1 = \rho_1\,\rho_7 & y_3 = \rho_4\,\rho_7 \\ y_2 = \rho_2\,\rho_7 + \rho_3\,\rho_9 & y_4 = \rho_5\,\rho_7 + \rho_6\,\rho_9 \\ z_1 = \rho_1\,\rho_8 & z_3 = \rho_4\,\rho_8 \\ z_2 = \rho_2\,\rho_8 & z_4 = \rho_5\,\rho_8 \end{cases}$$

La V_8^7 è, pertanto la varietà razionale di S_{11} rappresentata nell'S_9 $(\rho_1, \ldots, \rho_9)$ dal sistema lineare ∞^{12} di iperquadriche di equazioni:

$$[1] \quad \lambda_1 \rho_1 \rho_6 + \lambda_2 (\rho_2 \rho_6 + \rho_3 \rho_6) + \ldots\ldots + \lambda_{11} \rho_4 \rho_8 + \lambda_{12} \rho_5 \rho_8 = 0$$

ottenuta combinando linearmente i secondi membri delle (1).

L'S^*_4 di equazioni:

$$(2) \qquad \rho_6 = \rho_7 = \rho_8 = \rho_9 = 0$$

è base per il sistema di iperquadriche. Agli ∞^3 S_5 della stella in S_8 col vertice in S^*_4 corrisponderanno, per le (1), gli ∞^3 S_5 generatori della V_8^7, pertanto il sistema di iperquadriche deve secare in un tale S_5 passante per S^*_4, fuori di S^*_4, il sistema degli iperpiani (di grado 1). Invero considerato detto S_5 come congiungente un punto R $(0, 0, 0, 0, 0, \rho'_6, \rho'_7, \rho'_8, \rho'_9)$ dell'S^*_3 opposto ad S^*_4, con i cinque punti fondamentali $B_1, \ldots, B_5$ delle coordinate ρ_i, posti in S^*_4, si hanno per detto S_5 della stella, le seguenti equazioni parametriche: [Indicando con ρ'_6 l'unica coordinata non nulla di ciascuno dei punti $B_1, \ldots, B_5$.]

$$(3) \quad \begin{array}{l} \rho_1 = \sigma_1 \rho'_6, \quad \rho_2 = \sigma_2 \rho'_6, \quad \rho_3 = \sigma_3 \rho'_6, \quad \rho_4 = \sigma_4 \rho'_6, \quad \rho_5 = \sigma_5 \rho'_6 \\ \rho_6 = \rho'_6 \sigma_6, \quad \rho_7 = \rho'_7 \sigma_6, \quad \rho_8 = \rho'_8 \sigma_6, \quad \rho_9 = \rho'_9 \sigma_6 \end{array}$$

Queste sostituite nelle (1) danno i secondi membri divisibili per il fattore comune $\rho'_6 \sigma_6$. Eseguendo detta divisione (essendo i primi membri definiti a meno di un fattore) si hanno le equazioni parametriche *lineari* nei sei parametri $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$, rappresentanti in S_{11} un S_5 (generatore della V_8^7). (Calcolate più avanti).

Per avere, in particolare, un S_5 generatore della $V_6^{2(n+m)}$ contenuta nella V_8^7 bisogna imporre che il punto (x, y, z) del piano π appartenga alla curva c^n e che il punto $(x', y', 0)$ appartenga alla tangente a c^n nel punto (x, y, z), cioè bisogna imporre le due condizioni:

$$(4) \qquad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} x' + \dfrac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \end{cases}$$

condizioni che si traducono, per le posizioni fatte, nelle condizioni:

$$(5) \qquad \begin{cases} f(\rho_6, \rho_7, \rho_8) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \rho_6} \rho_6 + \dfrac{\partial f}{\partial \rho_7} \rho_7 = 0 \end{cases}$$

Sicchè se il punto R di $S^*_3(\rho_6, \rho_7, \rho_8, \rho_9)$ soddisfa alle due equazioni (5) l'S_5 generatore della V_8 di equazioni (3) apparterrà alla $V_6^{2(n-m)}$ determinata in S_{11} dalla curva c^n del piano π.

Si osservi che le (5) in S_8 rappresentano una varietà a 6 dimensioni intersezione di due iperconi aventi per vertice, ciascuno, un S_5 passante l'S^*_4 e quindi costituita da ∞^1 S_5 generatori passanti per S^*_4 e proiettanti gli ∞^1 punti della curva di S^*_3 rappresentata dallo stesso sistema (5).

Le equazioni parametriche di detto S_5 generatore della V_8^7, che si ricavano delle (1) e 3) eseguendo le operazioni sopra indicate sono:

$$(6)\quad \begin{cases} x_1 = \rho'_6\,\sigma_1 & x_3 = \rho'_6\,\sigma_4 \\ x_2 = \rho'_6\,(\sigma_2 + \sigma_3) & x_4 = \rho'_6\,(\sigma_5 + \sigma_6) \\ y_1 = \rho'_7\,\sigma_1 & y_3 = \rho'_7\,\sigma_4 \\ y_2 = \rho'_7\,\sigma_2 + \rho'_9\,\sigma_3 & y_4 = \rho'_7\,\sigma_5 + \rho'_9\,\sigma_6 \\ z_1 = \rho'_8\,\sigma_1 & z_3 = \rho'_8\,\sigma_4 \\ z_2 = \rho'_8\,\sigma_2 & z_4 = \rho'_8\,\sigma_5 \end{cases}$$

Si osservi esplicitamente che le (6) sono lineari omogenee sia rispetto ai parametri $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ sia rispetto ai parametri $\rho'_6, \rho'_7, \rho'_8, \rho'_9$. La V_8^7 ammette pertanto ∞^3 S_5 generatori e ∞^5 S_3 direttori. I primi si ottengono fissando la quaterna $(\rho'_6, \rho'_7, \rho'_8, \rho'_9)$ a meno di un fattore. I secondi si ottengono fissando la sestupla $(\sigma_1, \ldots, \sigma_6)$ a meno di un fattore.

Si osservi esplicitamente che dalle (6) si ricavano, viceversa le (1) ponendo al posto delle $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ le $\rho_1, \ldots, \rho_6$ e al posto delle $\rho'_6, \ldots, \rho'_9$ le $\rho_6, \ldots, \rho_9$.

Raccogliendo si ha:

Le equazioni parametriche della V_8^7 *si possono mettere sotto la forma* (1) *con i nove parametri omogenei* $\rho_1, \ldots, \rho_9$, *o sotto la forma* (6) *con i due sistemi di parametri omogenei* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_6)$, *e* $(\rho'_6, \ldots, \rho'_9)$, *che mettono in evidenza l'esistenza nella* V_8^7 *di un sistema di* ∞^3 S_5 *generatori e di un sistema* ∞^5 *di* S_3 *direttori. Le equazioni parametriche della* $V_6^{2(n-m)}$, *rispondente alla curva* c^n, *si ottengono dalle* (6) *considerando i parametri* $\rho'_6, \ldots, \rho'_9$ *legati dalle due equazioni* (5), rispondenti a particolari ∞^1 S_5 generatori della V_8^7.

Si osservi che gli ∞^5 S_3 direttori della V_8^7 provengono degli ∞^5 S_3 della stella di S_8 con il vertice nel piano S^*_2 di equazioni

$$(7)\qquad \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = \rho_6$$

che è un piano base per il sistema di iperquadriche [1].

In un S_3 passante per S^*_2 il sistema di iperquadriche seca, fuori di S^*_2 il sistema dei piani (di grado 1) e quindi ad un tale S_3 risponderà nella V_8^7 un S_3.

Se P è un punto di S_8 e diciamo P^0 il punto corrispondente nella V_8^7 l'S_5 generatore e l'S_3 direttore della V_8^7 passanti per P^0 rispondono all'S_5 e all'S_3 congiungenti P con l'S^*_4 e l'S^*_2 basi del sistema.

9. *Prolungamento di una trasformazione birazionale dell'* S_2 *come nell'* S_2 *triduale e sua rappresentazione nell'* S_{11} *ambiente della* V_8^7

Consideriamo nell'S_2 complesso una trasformazione birazionale di equazioni

$$(7) \qquad x' = F(x, y, z), \quad y' = G(x, y, z), \quad z' = H(x, y, z)$$

con

$$(8) \qquad aF(x, y, z) + bG(x, y, z) + cH(x, y, z) = 0$$

sistema omaloidico di curve di S_2.

Prolungando le forme F, G, H dal campo complesso al campo doppio-biduale, il sistema (7) ci dà le equazioni

$$(9) \qquad X' = F(X, Y, Z), \quad Y' = G(X, Y, Z), \quad Z' = H(X, Y, Z)$$

che rappresenta una trasformazione birazionale nell'S_2 doppio-biduale. Il sistema (9) equivale nel campo complesso ad un sistema di 12 equazioni composto con due sistemi di 6 equazioni il primo dei quali, posto

$$\begin{aligned} X &= x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 \\ Y &= y_1 u_1 + \ldots + y_4 u_4 \\ Z &= z_1 u_1 + \ldots + z_4 u_4 \end{aligned}$$

è dato da

$$(10)_{1,2} \qquad \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= F(x_1, y_1, z_1) \\ x'_2 &= \frac{\partial F}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial F}{\partial z_1} z_2 \\ y'_1 &= G(x_1, y_1, z_1) \\ y'_2 &= \frac{\partial G}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial G}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial G}{\partial z_1} z_2 \\ z'_1 &= H(x_1, y_1, z_1) \\ z'_2 &= \frac{\partial H}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial H}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial H}{\partial z_1} z_2 \end{aligned} \right.$$

L'altro sistema di 6 equazioni si ottiene dal sistema $(10)_{1,2}$ sostituendo agl'indici 1,2 gl'indici 3,4. Le dodici equazioni dei sistemi $(10)_{1,2}$ e $(10)_{3,4}$ rappresentano nell'S_{11} una trasformazione unirazionale che ammette come uniti i due $S'_5 = \pi_1 \pi_2$ e $S''_5 = \pi_3 \pi_4$ ambienti delle due congruenze di rette (S_1) ciascuna immagine del piano biduale (n° 2). Detta trasformazione unirazionale, diciamo T, trasforma in se stessa la congruenza (S_3) di S_{11} rappresentante il piano doppio-biduale perchè in S'_5 ed S''_5 subordina una trasformazione birazionale diciamo, rispettivamente T' e T'', la prima di equazioni $(10)_{1,2}$ e la seconda di equazioni $(10)_{3,4}$, e ciascuna di queste trasformazioni trasforma la congruenza S_1 contenuta in S'_5 (o in S''_5), tenendo anche conto che gli S_3 di (S_3) si ottengono congiungendo le coppie di rette di S'_5 ed S''_5 appartenenti alle due congruenze (S_1).

Si osservi che per

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0$$

i secondi membri della $(10)_{1,2}$ si annullano tutti e quindi il piano π_2 di $S'_5 = \pi_1 \pi_2$, rappresentato da dette equazioni dentro l'S'_5, risulta fondamentale per la T'. Si ricordi che a π_2 si appoggiano tutte le rette $P_1 P_2$ della congruenza (S_1) di S'_5 (n° 2). Analogamente si osservi che per la T'' risulta fondamentale il piano π_4 di S''_5.

Volendo considerare la trasformazione (7) data nell'S_2 complesso prolungata nel campo triduale, anzichè nel campo doppio-biduale, basta tener conto delle condizioni

$$(11) \qquad x_1 = x_3 \ , \quad y_1 = y_3 \ , \quad z_1 = z_3$$

nel qual caso i numeri doppio-biduali X , Y , Z risultano appartenenti alla sottoalgebra dei numeri triduali (n° 1, proprietà III).

In tal caso nella congruenza (S_3) si vengono a considerare solo gli ∞^6 S_3 che rappresentano il piano triduale. Tale insieme di ∞^6 S_3, contenuto nella congruenza (S_3), è trasformato in sè stesso dalla trasformazione unirazionale T di S_{11}, perchè dalle (11) segue dalle $(10)_{1,2}$ e $(10)_{3,4}$ che si hanno pure le condizioni

$$(11') \qquad x'_1 = x'_3 \ , \quad y'_1 = y'_3 \ , \quad z'_1 = z'_3$$

Concludendo si ha:

La trasformazione birazionale dell'S_2 complesso, di equazioni (7) prolungata nel campo triduale dà una trasformazione birazionale dell'S_2 triduale, rappresentata in S_{11} dalla trasformazione unirazionale T *di equazioni* $(10)_{1,2}$ *e* $(10)_{3,4}$ *che trasforma in se stesso il sistema degli* ∞^6 S_3

immagini dei punti dell' S_2 *triduale, subordinandovi una trasformazione, generalmente biunivoca, immagine di detta trasformazione birazionale triduale.*

Per la trasformazione T *sono uniti i due* S'_5 *e* S''_5 *congiungenti le due coppie di piano* $\pi_1\ \pi_2$ *e* $\pi_3\ \pi_4$, *e in ciascuno di essi subordina una trasformazione birazionale,* T', *in* S'_5 *di equazioni* $(10)_{1,2}$, *e* T'' *in* S''_5 *di equazioni* $(10)_{3,4}$.

Il piano π_2 *risulta sempre fondamentale per la* T'. *Il piano* π_4 *risulta sempre fondamentale per la* T''.

Si noti ora che dalle $(10)_{1,2}$ si ricava che per $x_2 = y_2 = z_2 = 0$ si ha pure $x'_2 = y'_2 = z'_2 = 0$ cioè *per la* T' *risulta unito il piano* π_1 *e in esso vi subordina la trasformazione di equazioni*

$$(7)_1 \qquad \begin{aligned} x'_1 &= F(x_1, y_1, z_1) \\ y'_1 &= G(x_1, y_1, z_1) \\ z'_1 &= H(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

analoga alla data.

Lo stesso dicasi per la T'' in S''_5 per la quale risulta unito il piano π_3 e vi subordina una trasformazione pure analoga alla data, di equazioni $(7)_3$ ottenute dalle $(7)_1$ sostituendo all'indice 1 l'indice 3.

10. *Trasformati mediante la* T *degli* S_5 *generatori della* V_8^7

Consideriamo un S_5 generatore della V_8^7, di equazioni parametriche $[S_5]$, del n° 8, con i sei parametri omogenei $\rho_1, \ldots, \rho_6$. Per determinare le equazioni parametriche della V_5 trasformata di S_5 mediante la T sostituiamo dette equazioni parametriche nelle $(10)_{1,2}$ e $(10)_{3,4}$. Le prime sei equazioni $(10)_{1,2}$, nelle quali intervengono solo le x_i e y_i con gl'indici 1 e 2, ci danno le x'_i e y'_i con gli indici 1, 2, funzioni delle sole ρ_1, ρ_2, ρ_3 con i secondi membri tutti divisibili per ρ_1^{m-1}, se è m il grado delle forme F, G ed H. Eseguendo la divisione per ρ_1^{m-1} si ottengono le seguenti equazioni:

$$(12)_{1,2} \qquad \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= \rho_1 F \\ x'_2 &= \rho_2 F + \rho_3 F' \\ y'_1 &= \rho_1 G \\ y'_2 &= \rho_2 G + \rho_3 G' \\ z'_1 &= \rho_1 H \\ z'_2 &= \rho_2 H + \rho_3 H' \end{aligned} \right.$$

avendo posto

$$F = (x\,,\,y\,,\,z)\,, \qquad F' = \frac{\partial F}{\partial x}\,x' + \frac{\partial F}{\partial y}\,y' + \frac{\partial F}{\partial t}\,t'$$

e le analoghe per le forme G ed H.

Dalle $(10)_{3,4}$ si hanno invece, dopo la sostituzione delle seconde sei equazioni [5] e dividendo per il fattore $\rho_3'''^{-1}$, le equazioni $(12)_{3,4}$ che si ottengono dalle $(12)_{1,2}$ sostituendo negl'indici delle x_i e y_i alla coppia 1,2 la coppia 3,4, e agl'indici delle ρ_i alla terna 1,2,3 la terna 4,5,6.

Le $(12)_{1,2}$ rappresentano nell'S'_5 un piano. Così le $(12)_{3,4}$ rappresenteranno in S''_5 un altro piano. Si ha perciò che la V_5 trasformata dell'S_5 generatore considerato è rappresentata da 12 equazioni parametriche dei sei parametri $\rho_1\,,\,\ldots\,,\,\rho_6$ di cui le prime sei divise per il fattore $\rho_1'''^{-1}$ e le seconde sei divise per il fattore $\rho_3'''^{-1}$ rappresentano, rispettivamente in S'_5 ed in S''_5, la proiezione della V_5 in S'_5 da S''_5 ed in S''_5 da S'_5, e tali proiezioni sono due piani, risultando i secondi membri funzioni lineari di ρ_1,ρ_2,ρ_3 nel primo sistema, e di ρ_4,ρ_5,ρ_6 nel secondo sistema. Tale V_5 è pertanto un S_2, e precisamente l'S_5 congiungente tali due piani uno posto in S'_5 ed uno posto in S''_5. Si osservi inoltre che per es. il primo di tali piani, di equazioni parametriche $(12)_{1,2}$ è il piano congiungente i tre punti

$$(13) \qquad \overline{Q}_1\,(F\,,\,G\,,\,H)\,, \quad \overline{Q}_2\,(F\,,\,G\,,\,H)\,, \quad \overline{M}_2\,(F'\,,\,G'\,,\,H')$$

il *primo del piano* π_1 *gli altri due nel piano* π_2 *e con i due punti* $\overline{Q}_1$ *e* $\overline{Q}_2$ *aventi le stesse coordinate.*

Analoghe osservazioni si fanno per le $(12)_{3,4}$ e risulterà di conseguenza che l'S_5 a cui si riduce la V_5 trasformata dell'S_5, di equazioni $[S_5]$ considerato nella V_8^7 è un S_5 generatore della stessa V_8^7 perchè congiunge due piani posti uno in $S'_5 = \pi_1\,\pi_2$ ed uno in $S''_5 = \pi_3\,\pi_4$ il primo appoggiato a π_1 e π_2 in due punti aventi le stesse coordinate, ed il secondo appoggiato a π_3 e π_4 pure in due punti aventi le stesse coordinate. Inoltre il primo seca π_2 in una retta e così il secondo seca π_1 in una retta. Raccogliendo si ha:

I) *La trasformazione unirazionale* T *dell'*S_{11} *immagine della trasformazione birazionale dell'*S_2 *triduale, prolungamento nel campo triduale di una trasformazione birazionale del piano complesso, trasforma in sè stessa la varietà* V_8^7 *trasformando in sè stesso il sistema dei suoi* ∞^7 S_5 *generatori.*

11. *Trasformata della* $V_6^{2(n+m)}$ *mediante la* T.

La $V_6^{2(n+m)}$ dell'S_{11} che rappresenta la curva algebrica triduale, prolungamento della curva c^n, di classe m, dell'S_2 complesso nel piano triduale, è costituita da ∞^1 S_5 della V_8^7. La $V'^{2(n'+m')}_6$ rispondente alla curva $c^{n'}$ di S_2 trasformata della c^n nella trasformazione birazionale di S_2 di equazioni (7), rappresenta in S_{11}, dopo prolungata nel campo triduale della trasformazione T, sarà la trasformata mediante, la T, della $V_6^{2(n+m)}$, e sarà precisamente costituita dagli ∞^1 S_5 della V_8^7 trasformati degli ∞^1 S_5 generatori della V'_6. Con m' si è sopra indicata la classe della $c^{n'}$ trasformata della c^n.

Nota. — È bene ricordare che gli S_5 generatori della $V_6^{2(n+m)}$ e della $V'^{2(n'+m')}_6$ rispondono ai punti semplici di c^n e $c^{n'}$ ciascuno dei quali è accoppiato con la tangente alla curva in detto punto, e alle posizioni limiti di tali *coppie punto-retta appartenentisi* col variare di un punto semplice nella curva tendendo ad una eventuale punto multiplo della curva stessa. I punti multipli di c^n e di $c^{n'}$ non intervengono nella determinazione delle due varietà. Si ricordi in proposito quanto è detto nel n° 4 in relazione ad un punto multiplo di c^n all'S_7 di S_{11} ad esso corrispondente, congiungente due S_3, uno in S'_5 e l'altro in S''_5, rispondenti a tale punto multiplo e che si staccano dalle V_3 di ordine n^2 rispondenti alla c^n in S'_5 e S''_5 e dalle quali, *staccando tutti gli* S_3 *rispondenti ai punti multipli*, si hanno le due varietà V_3^{n+m} poste una in S'_5 e l'altra in S''_5 costituite ciascuna da ∞^1 piani, in corrispondenza proiettiva, e congiunti dagli ∞^1 S_5 generatori della $V_6^{2(n+m)}$. In altri termini *nella determinazione della* V_3^{n+m} *e conseguentemente della* $V_6^{2(n+m)}$, *la* c^n *interviene come insieme di* ∞^1 *coppie punto-retta appartenentisi fra le* ∞^3 *coppie rappresentate nella* V_8^7 *mediante i suoi* S_5 *generatori*. La c^n interviene pertanto con la sua *determinazione tangenziale*, escludendo ogni fascio di rette avente per centro un punto multiplo, considerando in un tal fascio solo le rette tangenti alla curva nel punto multiplo. Ciò spiega perchè nell'ordine della V_3, (e quindi della V_6) interviene la classe m della c^n, oltre all'ordine n.

Equazioni di secondo e terzo grado nell' algebra di Study
Radici ennesime di un numero di Study

Nota del dott. **Umberto Sardi**, *presentata dal socio* **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 15 maggio 1954)

Sunto. Richiamate alcune nozioni sull' algebra di Study (§. 1), si sono risolte le equazioni di secondo e terzo grado (§ §. 2-3), studiando le singolarità delle radici nel caso particolare che le equazioni siano derivabili. Si son determinate, infine (§. 4), le radici ennesime di un numero di Study.

1. — *Premesse.*

L' algebra dei numeri di Study è un' algebra del terzo ordine *non* commutativa, la cui tabella di moltiplicazione è:

(1)

	u_1	u_2	u_3
u_1	0	u_1	0
u_2	0	u_2	0
u_3	u_1	0	u_3

Perciò, in tale algebra, non è possibile sommare i termini dello stesso grado nella variabile di Study $\mu = xu_1 + yu_2 + zu_3$.

Basta considerare, infatti, che i termini del secondo grado nelle variabili μ possono essere del tipo $a\,\mu^2$; $\mu^2\,b$; $a\cdot\mu\ b\cdot\mu\ c$ e così via. Si dimostra, però, che dato un polinomio del grado « n » nella variabile $\mu = xu_1 + yu_2 + zu_3$, operando i diversi prodotti e raggruppando i coefficienti delle medesime unità, esso può sempre ridursi nella forma:

$$[\Phi_n(y, z) + x\,\Psi_{n-1}(y, z)]\,u_1 + f_n(y)\,u_2 + g_n(z)\,u_3 \qquad (2)$$

dove Φ_n e Ψ_{n-1} sono generici polinomi, di grado uguale all' indice, nelle variabili y e z, e g_n ed f_n polinomi in una variabile di grado n [1]).

[1]) cfr. N. Spampinato., *Lez. di geometria superiore.* Pironti. Napoli, vol. V, parte III, n 12, pp. 146 e sg.

Tale forma dicesi *normale*, perchè per essa vale il principio di identità dei polinomi.

Inoltre per la non commutatività dell'algebra, non si può parlare di derivata di un polinomio. Infatti, data la funzione della variabile di STUDY $\mu = xu_1 + yu_2 + zu_3$:

$$f(\mu) = f_1(x, y, z)\, u_1 + f_2(x, y, z)\, u_2 + f_3(x, y, z)\, u_3$$

essa ammette derivata destra unica quando e solo quando è del tipo:

$$f(\mu) = [a_1 x + \varphi(y)] + f_2(y)\, u_2 + (a z + b)\, u_3$$

e derivata sinistra unica quando e solo quando è

$$f(\mu) = [a_1 x + \varphi(z)]\, u_1 + (a y + b)\, u_2 + f_3(z)\, u_3$$

e tali derivate, che indicheremo rispettivamente con i simboli $f'(\mu)$ ed $'f(\mu)$, si ottengono derivando i coefficienti delle unità [1]).

Notare che tali derivate sono funzioni di uno solo dei coefficienti della variabile μ (ad es.: la derivata destra: $f'(\mu) = [a_1 + \varphi'(y)]\, u_1 + f_2\, u_2 + a u_3$ è funzione della sola y), e che sono ulteriormente derivabili; ma le derivate di ordine superiore sono divisori dello zero [ad es: $f''(\mu) = \varphi''(y)\, u_1 + {}'f''_2(y)\, u_2$.]

Ricordiamo ancora che nell'algebra di STUDY i numeri divisori destri dello zero, sono anche divisori sinistri dello zero, e che tali numeri sono quelli aventi nullo uno almeno dei coefficienti delle due unità u_2 ed u_3.

Infine, si ricordi che il modulo dell'algebra di STUDY è: $u = u_2 + u_3$

2) — *Equazioni di secondo grado.*

Sia data l'equazione $M(\mu) = 0$ di secondo grado nella variabile di STUDY $\mu = xu_1 + yu_2 + zu_3$, con $M(\mu)$ polinomio di secondo grado. Ridotta a forma normale tale equazione diventa:

$$(1) \qquad [\Phi_2(y,z) + x \cdot \Psi_1(y,z)]u_1 + (b_0 y^2 + b_1 y + b_2)u_2 + (c_0 z^2 + c_1 z + c_2)u_3 = 0$$

dove i coefficienti dei polinomi Φ_2 e Ψ_1, ed i numeri b_i e c_i sono numeri complessi. E' Evidente, che la (1) è soddisfatta quando e solo quando è:

[1]) cfr. N. SPAMPINATO, *Op. cit.*, vol. V, parte III, n. 19, pp. 174 e seg.

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi_2(y, z) + x \cdot \Psi_1(y, z) = 0 \\ b_0 y^2 + b_1 y + b_2 = 0 \\ c_0 z^2 + c_1 z + c_2 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema, di quarto grado, ammette quattro soluzioni; e quindi l'equazione (1) ammette *quattro* radici.

Ciò, del resto, è conseguenza immediata dal teorema fondamentale dell'algebra esteso alle algebre ipercomplesse, per il quale il numero delle radici di una equazione di grado n, in un'algebra di ordine r, è dato dalla potenza di n avente per esponente r-s, essendo s l'ordine dello sottoalgebra eccezionale dell'algebra considerata [1]).

Nel caso dell'algebra di STUDY, si ha che $r - s = 2$, essendo tale algebra del terzo ordine, e la sua sottoalgebra eccezionale del primo ordine.

Ora, detti Δ_b e Δ_c i discriminanti delle due equazioni di secondo grado del sistema (2), si ha che tale sistema ammette quattro soluzioni distinte

$$x_{ij} = -\frac{\Phi_2(y_i, z_j)}{\Psi_1(y_i, z_j)} \; ; \quad y_i \; ; \quad z_j \; ; \qquad (i, j = 1, 2)$$

quando $\Delta_b \neq 0$, $\Delta_c \neq 0$; e le soluzioni della (1) saranno date da:

$$\mu_{ij} = x_{ij} u_1 + y_i u_2 + z_j u_3 \qquad (i, j = 1, 2)$$

Per $\Delta_b = 0$ e $\Delta_c \neq 0$ (oppure $\Delta_b \neq 0$ e $\Delta_c = 0$), le quattro radici della (1) risultano due a due coincidenti, mentre per $\Delta_c = \Delta_b = 0$ le quattro radici della (1) risultano tutte coincidenti. Ma non si può studiare la singolarità di tali radici coincidenti, perchè generalmente la (1) non è derivabile.

Consideriamo il caso particolare che la (1) sia derivabile a destra, e conveniamo di chiamare *semplici* le radici della (1) che non annullano nè rendono divisore dello zero la derivata prima della (1); *bisemplici* le radici che rendono divisore dello zero la derivata prima considerata; *doppie* le radici che annullano tale derivata prima.

Analogamente, per le equazioni di ordine superiore, si definiranno le radici *trisemplici*, che rendono divisore dello zero le derivate prima e seconda, *bidoppia*, che annullano la derivata prima, e rendon divisore dello zero la derivata seconda, e così via.

---

[1]) Tale teorema è stato dimostrato dal prof. N. SPAMPINATO, dell'Università di Napoli.

Supponendo ora, che la (1) sia derivabile a destra, essa è del tipo:

$$[\Phi_2(y) + a\,x]\,u_1 + (b_0\,y^2 + b_1\,y + b_2)\,u_2 + (c_1\,z + c_2)\,u_3 = 0$$

e cioè:

$$(3)\quad (a_0\,y^2 + a_1\,y + a_2 + a\,x)\,u_1 + (b_0\,y^2 + b_1\,y + b_2)\,u_2 + (c_1\,z + c_2)\,u_3 = 0$$

In tal caso, il sistema (2) diventa:

$$(4)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{a_0\,y + a_1\,y + a_2}{a} \\ b_0\,y^2 + b\,,y + b_2 = 0 \\ c_1\,z + c_2 = 0 \end{cases}$$

Allora, delle radici della (1), due sono finite: $\mu_i = x_i\,u_1 + y_i\,u_2 + \bar{z}\,u_3$, dove $x_i\,,\,y_i\,,\,\bar{z}$ sono le soluzioni del sistema (4), e due sono del tipo: $\mu = x_i\,u_1 + y_i\,u_2 + \infty\,u_3$.

Le due radici finite sono semplici (a destra) e distinte se $\Delta_0 \neq 0$; per $\Delta_0 = 0$ esse sono coincidenti e si ha una radice $\bar{u}$ *bisemplice,* poichè la derivata della (3)

$$M'(\mu) = (2a_0\,y + a_1 + a)\,u_1 + (2a_0\,y + b_1)\,u_2 + c_1\,u_3$$

diventa, per $\mu = \bar{\mu}$, divisore dello zero, avendo il secondo coefficiente nullo. Affinchè per $\Delta_0 = 0$, si abbia una radice *doppia* (a destra), deve esser $M'(\bar{\mu}) = 0$, e quindi

$$\bar{y} = -\frac{a_1 + a}{2a_0} = -\frac{b_1}{2b_0}\;;\quad e\quad c_1 = 0$$

ma per $c_1 = 0$, affinchè la (3) sia soddisfatta, deve essere anche $c_2 = 0$.

In tal caso, però, la (3) diventa indipendentemente dalla variabile complessa z; e le sue radici finite sono del tipo:

$$\mu\,\bar{x}\,u_1 + \bar{y}\,u_2 + z u_3$$

con z qualunque, ed $\bar{x} = x(\bar{y})$, ed $\bar{y} = -\dfrac{b_1}{2b_0}$

Concludendo: Se l'equazione di secondo grado è derivabile a destra e quindi del tipo (3), per $\Delta_0 = 0$ ammette una radice *bisemplice a destra* nel caso generico; se è anche:

$$\frac{a_1 + a}{2a_0} = \frac{b_1}{2b_0}\;;\quad c_1 = c_2 = 0$$

essa ammette infinite radici (indipendenti dalla variabile z) tutte *doppie a destra;* ma in tal caso l'equazione considerata è un polinomio divisore dello zero.

Analogamente, se la (1) è derivabile a sinistra, e cioè del tipo:

$$(4) \qquad (a_0z^2+a_1z+a_2+ax)u_3+(b_1y+b_2)u_2+(c_0z^2+c_1z+c_2)u_3=0$$

si ha che essa ammette due radici finite *semplici* (a sinistra) e distinte, se è $\Delta_c \neq 0$; una sola radice finita *bisemplice* (a sinistra) se è $\Delta_c = 0$; ed infinite radici *doppie* (a sinistra) ed indipendenti dalla variabile y quando è:

$$\frac{a_1 + a}{2a_0} = \frac{c_1}{2c_0} \; ; \qquad \Delta_c = 0 \; ; \qquad b_1 = b_2 = 0.$$

3). — *Equazioni di terzo grado.*

Sia data l'equazione $M(\mu) = 0$ nella variabile di STUDY $\mu = xu_1 + yu_2 + zu_3$, ed $M(\mu)$ polinomio di terzo grado. Tale equazione, ridotta a forma normale, diventa;

$$(1) \quad [\Phi_3(y,z)+x\Psi_2(y,z)]u_1+(b_0y^3+b_1y^2+b_2y+b_3)u_2+(c_0z^3+c_1z^2+c_2z+c_3)u_3=0$$

dove Φ_3 e Ψ_2 indicano polinomi generici nelle variabili y e z, di grado uguale all'indice.

E' evidente che la (1) è soddisfatta quando e solo quando è:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{\Phi_3(y\,,z)}{\Psi_3(y\,,z)} \\ b_0\,y^3 + b_1\,y^2 + b_2\,y + b_3 = 0 \\ c_0\,z^3 + c_1\,z^2 + c_2\,z + c_3 = 0 \end{cases}$$

Ora, posto:

$$\begin{cases} p_b = \dfrac{1}{3}(3b_0\,b_2 - b_1^2) \\ q_b = \dfrac{1}{27}(27\,b_0^2\,b_3 - 9b_0\,b_1\,b_2 + 2b_1^3) \\ \Delta_b = \dfrac{q_b^2}{4} + \dfrac{p_b^3}{27} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r_b = \left| -\dfrac{q_b}{2} + \sqrt{\Delta_b} \right|^{1/3} \\ s_b = \left| -\dfrac{q_b}{2} - \sqrt{\Delta_b} \right|^{1/3} \\ t_b = -\dfrac{b_1}{3} \end{cases}$$

e definiti in modo analogo i numeri $p_c\,, q_c\,, \Delta_c\,, r_c\,, s_c$ e t_c, si ha:

$$\begin{cases} y_1 = r_b + s_b + t_b \\ y_2 = kr_b + k^2 s_b + t_b \\ y_3 = k^2 r_b + k s_b + t_b \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = r_c + s_c + t_c \\ z_2 = kr_c + k^2 s_c + t_c \\ z_3 = k^2 r_c + k s_c + t_c \end{cases}$$

essendo k e k^2 le radici cubiche dell' unità. ($\neq 1$)

Si ha quindi che il sistema (2) ammette nove soluzioni:

$$x_{ij} = -\frac{\Phi_3(y_i, z_j)}{\Psi_3(y_i, z_j)} \; ; \quad y_i \; ; \quad z_j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

e che le soluzioni della (1) sono nove e del tipo:

$$\mu_{ij} = x_{ij}\, u_1 + y_i\, u_2 + z_j\, u_3 \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

Tali radici sono tutte distinte se è $\Delta_b \neq 0$ e $\Delta_c \neq 0$.

Se invece è $\Delta_b = 0$ $q_b \neq 0$ e $\Delta_c \neq 0$ (oppure $\Delta_c = 0$, $q_c \neq 0$ e $\Delta_b \neq 0$), delle nove radici sei sono a due a due coincidenti: si hanno perciò solo *sei* valori *distinti*.

Se è $\Delta_b = q_b = 0$ $\Delta_c \neq 0$ le radici distinte della (1) sono tre: se è $\Delta_b = \Delta_c = 0$, $q_b \neq 0$ e $q_c \neq 0$, le radici distinte della (1) sono quattro; se è $\Delta_b = \Delta_c = q_b = 0$ e $q_c \neq 0$, le radici distinte della (1) sono solo due; e se, infine, è $\Delta_b = \Delta_c = q_b = q_c = 0$, la (1) ammette un' unica radice (cioè: le nove radici della (1) sono tutte coincidenti).

Supponiamo ora che la (1) sia derivabile a destra, e cioè sia del tipo:

$$[\Phi_3(y) + ax]\, u_1 + (b_0 y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3)\, u_2 + (c_2 z + c_3)\, u_3 = 0$$

e cioè

$$(3) \quad [(a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3) + ax]u_1 + (b_0 y^3 + b_1 y^2 + b y_2 + b_3)u_2 + (c z_2 + c_3)u_3 = 0$$

In tal caso il sistema (2) diventa

$$(4) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{a_0 y^3 + a_1 y^2 + z_2 y + a_3}{a} \\ b_0 y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3 = 0 \\ c_2 z + c_3 = 0 \end{cases}$$

Allora delle nove radici della (1), tre sono finite: $\mu_i = x_i u_1 + y_i u_2 + \bar{z} u_3$ (dove $x_i, y_i, \bar{z}$ solo le soluzioni del sistema (4)), e le altre sei sono del tipo: $a_i u_1 + y_i u_2 + \infty u_3$.

Le tre radici finite della (3) sono semplici (a destra) se è $\Delta_b \neq 0$; se è, invece, $\Delta_b = 0$ e $q_b \neq 0$ delle tre radici finite, una è semplice, $(x_1, y_1, \bar{z})$ le altre due sono coincidenti $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

La radice $\bar{\mu} \quad \mu(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è *bisemplice* (a destra), perchè la derivata della (3).

$$M'(\mu) = (3a_0 y^2 + 2a_1 y + a_2 + a) u_1 + (3b_0 y^2 + 2b_1 y + 2b_2) u_2 + c_2 u_3$$

per $\mu = \bar{\mu}$ è divisore dello zero, mentre la derivata seconda

$$M''(\mu) = (6a_0 y + 2a_1) u_1 + (6b_0 y + 2b_1) u_2$$

è diversa da zero.

Affinchè la radice $\bar{\mu} = \mu(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sia *doppia* (a destra), deve essere, ovviamente, $M'(\bar{\mu}) = 0$; e quindi oltre alla condizione $\Delta_b = 0$, deve esser verificato:

$$3a_0 \bar{y}^2 + 2a_1 \bar{y} + a_2 + a = 0 \; ; \quad c_2 = 0 \tag{5}$$

Ma in tal caso, le radici della (3) sono indipendenti dalla variabile z, dovendo essere anche $c_3 = 0$; e quindi si hanno infinite radici.

Se è $\Delta_b = q_b = 0$, le radici finite sono tutte e tre coincidenti:

Si ha, nel caso generale, una radice *trisemplice* (a destra); si hanno infinite radici *bidoppie* (a destra), indipendenti da z, se ne sono soddisfatte anche le (5); ed infine, infinite radici *triple* (a destra). se è $M''(\bar{\mu}) = 0$, cioè se è anche $\bar{y} = -\dfrac{a_1}{3a_0} = -\dfrac{b_1}{3b_0}$.

Analogamente, se la (1) è derivabile *a sinistra*, e cioè del tipo:

$$[\Phi_3(z) + ax] u_1 + (b_2 y + b) u_2 + (c_0 z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3) = 0$$

Si ha che una ammette tre radici finite *semplici* se è $\Delta_c \neq 0$; una radice *semplice* ed una *bisemplice*, se è $\Delta_c = 0$ e $q_c \neq 0$; infinite radici *semplici* ed infinite radici *doppie* (tutte indipendenti dalla variabile y), se è $\Delta_c = 0$, $q \neq 0$, $'M(\bar{\mu}) = 0$.

Una radice *trisemplice* se è $\Delta_c = q_c = 0$; infinite radici *bidoppie* (a sinistra) se è $\Delta_c = q_c = 0$, ed $'M(\bar{\mu}) = 0$; infinite radici *triple*, indipendenti dalla variabile y, quando è $'M(\bar{\mu}) = {}''M(\bar{\mu}) = 0$, e $\Delta_c = q_c = 0$.

4) — *Radici n-esime di un numero dell'algebra di Study.*

Dato un numero $\mu = xu_1 + yu_2 + zu_3$ appartenente all'algebra di STUDY si ha, eseguendo i calcoli con la tabella di moltiplicazione di cui al paragrafo 1, che:

$$\mu^n = x\,(y+z)^{n-1}\,u_1 + y^n\,u_2 + z^n\,u_3 \tag{1}$$

Quindi, l'equazione

$$\mu^n = a$$

equivale all'equazione:

$$x\,(y+z)^{n-1}\,u_1 + y^n\,u_2 + z^n\,u_3 = a_1\,u_1 + a_2\,u_2 + a_3\,u_3 \tag{2}$$

dove è $a = a_1\,u_1 + a_2\,u_2 + a_3\,u_3$.

Un numero di STUDY « μ » ammette perciò n^2 radici ennesime, date da:

$$\mu_{hk} = x_{hk}\,u_1 + y_h\,u_2 + z_k\,u_3 \qquad (h,k = 1, 2, \ldots, n)$$

dove è

$$\left\{\begin{array}{l} x_{h,k} = \dfrac{a_1}{(y_h + z_k)^{n-1}} \\ y'' \quad \rho_2^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\varphi + h\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\varphi + h\pi}{n}\right) \quad \text{con:} \quad \left\{\begin{array}{l} a_2 = [\rho_2,\varphi] \\ a_3 = [\rho_3,\vartheta] \end{array}\right. \\ z_h = \rho_3^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\vartheta + k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\vartheta + k\pi}{n}\right) \end{array}\right. \tag{3}$$

Notare infine che se « μ » è divisore binomio dello zero, anche le sue radici ennesime son divisori binomi dello zero, essendo nullo o il coefficiente y_h o il coefficiente z_h.

Se « a » è divisore binomio dello zero, per le (2) e le tre, deve essere: $y_h = z_k = 0$; e quindi, per le (3), $x_{h,k} = \dfrac{a_1}{0} = \infty$.

Quindi in tal caso, si ha che le radici di « a » sono tutte del tipo:

$$\mu = \infty\,u_1 + 0u_2 + 0u_3.$$

Però un numero di tal tipo non ha potenza determinata, perchè dalla (1) si ha:

$$\mu^n = (0\cdot\infty)\,u_1 + 0u_2 + 0u_3$$

ed $\infty\cdot 0$ è appunto una forma indeterminata.

Aspetti geochimici di una particolare trasformazione del carbonato in fosfato di calcio nella grotta della « Zinzulusa » (Lecce)

Nota del dott. **Vincenzo Minieri** *presentata dal socio* **G. D' Erasmo**

(Adunanza del dì 6 novembre 1954)

Sunto. — È stato studiato un particolare fenomeno di trasformazione del calcare in fosfato di calcio, osservabile nella grotta « Zinzulusa » presso Castro (Lecce), dovuto ad un deposito di guano esistente in quella cavità ed ora asportato. Il fenomeno predetto s' inserisce, per particolari aspetti, nel ciclo geochimico del fosforo in natura e mostra altresì che la formazione di alcuni depositi fosfatici sedimentari è connessa a cause di natura geologica e biochimica.

1. *Premessa.* — È noto che nella fenomenologia carsica assume un aspetto notevole ed interessante il processo genetico di quei depositi di carbonato di calcio le cui concrezioni, indicate col nome di stalattiti e stalagmiti, formano l' ornamento pittoresco della maggior parte delle grotte. Particolari condizioni ambientali, talune influenze locali od anche la natura dei terreni attraverso i quali le acque percolano o filtrano possono limitare o addirittura impedire che le concrezioni si formino con quella normalità, che talora dà al fenomeno un carattere assai imponente.

Così, ad esempio, il Martel [1]) segnala la mancanza di concrezioni calcaree tanto nelle grotte di Bramabiau, nelle Cévennes, quanto in quelle di Miremont, in Dordogne, ove addirittura esiste una caverna di 4900 metri di sviluppo senza una sola stalattite. L' autore è d' avviso che nelle prime il fenomeno è dovuto a correnti d' acqua, le quali dilavando ad intervalli ritmici le pareti dei condotti, ostacolano il lento deposito della pellicola di $CaCO_3$, asportandola prima ch' essa si solidifichi; a Miremont, invece, entrerebbe in gioco la natura della roccia, cioè la bianca e farinosa « craie », assai poco permeabile per imbibizione, e nella quale la circolazione delle acque sotterranee è legata all' esistenza di litoclasi più o meno cospicue.

Una situazione del genere, sebbene connessa a cause di natura diversa, si presenta in un tratto abbastanza vasto della grotta « Zinzulusa », che si apre sul mare Adriatico, presso Castro (Lecce). Tale cavità, già nota agli

---

[1]) Martel E. A., *Les abimes, les eaux souterraines, les cavernes, les sources, la spélaelogie.* Paris, 1894.

studiosi, è stata recentemente oggetto di uno studio geospeleologico da parte di A. Lazzari [1]), il quale assai cortesemente volle segnalarmi l'interessante fenomeno e raccogliere una serie di campioni tali da poter dar conto di tutti i fenomeni verificatisi e consentire di risalire alle presumibili diverse cause locali che hanno determinato la situazione predetta. Colgo perciò qui l'occasione di ringraziarlo vivamente, mentre nel contempo esprimo la mia riconoscenza al prof. G. D'Erasmo, Direttore dell'Istituto di Geologia, che incoraggia con preziosi consigli le mie ricerche.

2. *Cenni geologici.* — Per le notizie geologiche particolari sulla grotta Zinzulusa si può consultare il lavoro innanzi citato. Qui, ai fini della ricerca delle influenze locali, che in definitiva hanno impedito la formazione di quelle concrezioni solide cristalline calcaree — che nella calma delle cavità sotterranee si originano dalla lenta evaporazione di acque bicarbonatiche calciche, la quale mette in libertà l'eccesso di acido carbonico, sì da consentire la cristallizzazione del $CaCO_3$ — si richiamano soltanto pochi cenni generali, ma vengono invece particolarmente messi in evidenza taluni aspetti geochimici del fenomeno, che s'inserisce nel quadro del ciclo geochimico del fosforo, nel suo passaggio dal mondo organico a quello inorganico. Nell'ambito di queste ricerche s'inquadrano le osservazioni che formano oggetto della presente nota.

La Zinzulusa, della lunghezza complessiva di circa 150 metri, si apre in corrispondenza di una faglia interessante i calcari compatti del Cretaceo, che a non grande distanza vengono a contatto con quelli oligocenici. La grotta è costituita essenzialmente da un corridoio, con rare diramazioni laterali, che porta a due grandi vani terminali, posti l'uno di seguito all'altro e denominati *Duomo* e *Cocito*. La prima di tali cavità terminali si presenta assai vasta, con volta altissima ed il suolo che si abbassa profondamente rispetto al corridoio di accesso. Caratteristica di questo vano e di quello successivo è l'assoluta mancanza di concrezioni stalattitiche e stalagmitiche o di qualsiasi deposito cristallino calcareo lungo le pareti. Sostanzialmente in ciò essi si differenziano dalle restanti parti della grotta che precedono il Duomo, le quali fino a 15 metri circa da quest'ultima cavità, risultano riccamente rivestite di concrezioni calcaree.

Il suolo del Duomo era un tempo ricoperto da un deposito di guano, che in qualche punto raggiungeva la potenza di oltre dieci metri. Tale guano è stato negli ultimi anni quasi completamente asportato per scopi agricoli; ma di esso, tuttavia, sono ben visibili le tracce lungo tutto il perimetro della cavità, la quale si apre al contatto tra i calcari ippuritici

[1]) Lazzari A., *Sopra un fenomeno di idrografia sotterranea osservabile nella grotta Zinzulusa presso Castro (Lecce)*. Boll. Soc. dei Naturalisti di Napoli, vol. LVI. Napoli, 1947.

e quelli oligocenici, i quali risultano, almeno a prima vista, notevolmente alterati là dove il guano veniva a contatto con la roccia.

Non è stato possibile accedere nella parte più bassa del pavimento del Duomo, ma, com'è già stato riferito, la serie dei campioni prelevati è tale da consentire di risalire analiticamente alle cause che hanno determinato i vari fenomeni.

Il fatto saliente, che ha originato la presente ricerca, è che l'ultimo tratto del corridoio e le pareti delle due ultime cavità indicate, ove le formazioni calcaree sono assolutamente assenti, risultano rivestite, almeno fino ad altezza osservabile, da una patina bianco-giallastra, che si presenta come una poltiglia melmosa, solcata talvolta da vermiculazioni rossicce scure, che rappresenta un rivestimento di circa 25 millimetri, sotto i quali il calcare bianco risulta poco compatto, alterato, e addirittura farinoso in superficie.

Poichè era presumibile che tale situazione dovesse essere messa in rapporto con la presenza del guano, i cui prodotti di fermentazione e quelli ancora da essi derivati potrebbero aver influito sul mancato processo di deposizione del carbonato di calcio disciolto nelle acque carboniche attraversanti i calcari, e poichè si poteva inizialmente ammettere che taluni composti contenuti originariamente nel guano, od in questo formatisi a seguito di processi fermentativi, avrebbero potuto reagire con il calcare e le soluzioni di tale roccia, pervenendo, per capillarità delle acque che li conteneva disciolti, sulle pareti delle cavità, ho ritenuto opportuno eseguire alcune ricerche chimiche, destinate a chiarire una possibile interpretazione geochimica dei fenomeni intravisti.

3. *Ricerche chimiche.* — Sono stati sottoposti ad analisi chimica vari campioni tra quelli opportunamente raccolti, e cioè: 1) la patina che rappresenta un risvestimento di circa 25 millimetri, sotto il quale la roccia, che è stata per lungo tempo a contatto col guano, appare notevolmente alterata; 2) la patina raccolta a metri 1,50 più in alto del campione precedente, in zona certamente mai ricoperta dall'antico deposito organico; 3) la patina di alterazione delle pareti del corridoio di accesso, a m. 1,80 dal suolo e a 5 metri di distanza dall'inizio delle concrezioni calcaree, che poi s'interrompono bruscamente; 4) il calcare alterato sottostante al rivestimento di cui al campione n. 1. Tale scelta è stata effettuata in conseguenza delle osservazioni fatte in posto, dalle quali si rileva che lo spessore della poltiglia melmosa sembra diminuire dal basso verso l'alto e dal Duomo verso l'esterno e che nella cavità predetta ed all'inizio del corridoio la roccia sottostante alla patina biancastra mostra, almeno apparentemente, segni di alterazione: certamente tale roccia appare diversa da quella prelevata là dove non si forma più la patina.

I dati analitici riassuntivi, relativi ai campioni esaminati, sono indicati nel quadro che segue, rispettivamente ai numeri I, II, III, IV.

	I	II	III	IV
res. ins.	1.10	0.85	3.90	—
Al_2O_3	0.87	0.75	1.60	0.30
Fe_2O_3	0.36	0.35	0.90	0.25
CaO	50.07	50.35	49.15	54.95
MgO	1.81	2.25	1.65	0.60
Na_2O	tr.	1.76	tr.	—
K_2O	tr.	3.18	tr.	—
CO_2	6.35	7.05	16.71	43.07
P_2O_5	35.06	27.33	19.80	0.59
NO_3^-	tr.	2.30	tr.	—
H_2O^-	1.05	1.90	2.01	0.16
H_2O^+	3.24	2.44	4.92	0.46
TOTALE	99.91	100.51	100.44	100.28
$Ca_3(PO_4)_2$	77.13%	60.12%	43.64%	1.29%
$CaCO_3$	13.30%	16.52%	40.62%	96.34%

I risultati ottenuti convalidano pertanto l'ipotesi assunta nelle considerazioni precedenti per l'interpretazione del fenomeno, che in definitiva, secondo quanto successivamente sarà più ampiamente indicato, porta alla logica conclusione che la deposizione calcarea non si verificò nel corso del tempo, perchè un complesso di reazioni e di fattori ad esse connessi, ha condotto ad una lenta e costante trasformazione del calcare in fosfato tricalcico, come del resto su vasta scala tale processo si verifica per molti giacimenti di fosforite, la cui genesi è dovuta ad uno scambio metasomatico che si verifica nelle serie organogene calcaree (atolli coralligeni ecc.), sottoposte all'azione del guano, che su di esse si formò dopo la deposizione d'imponenti resti organici.

Le analisi sono state eseguite secondo il metodo di Reynoso, consigliato da Treadwell [1]), ossia usando acido metastannico in soluzione nitrica ed in eccesso per eliminare l'H_3PO_4, che impedisce la normale ricerca dei vari cationi. A tale scopo un grammo di sostanza è stato evaporato a secco due volte con HNO_3 concentrato, ripreso con 15 cm^3 di HNO_3, a cui si è aggiunto 1 gr. di stagno purissimo. Dopo ebollizione, il precipitato è stato ripreso con 100 cm^3 di acqua e lasciato depositare per

[1]) Treadwell F. P., *Trattato di chimica analitica*, voll. I e II. Milano, 1949

12 ore in un cilindro stretto. La soluzione soprastante, raccolta con precauzione, è stata poi analizzata con i comuni metodi di procedimento analitico.

I nitrati sono stati determinati con la base « Nitron » e l'acido fosforico, su un grammo di sostanza a parte, come pirofosfato di magnesio, dopo precedente precipitazione come fosfomolibdato ammonico.

Tenendo conto dei risultati raggiunti e della percentuale di fosfato tricalcico ricavata, si può ammettere che la trasformazione in fosfato del calcare diminuisce dalla zona di contatto del guano verso l'alto delle pareti del Duomo e sempre più verso l'esterno del corridoio d'accesso, fino a cessare al limite in cui si rinvengono le stalattiti e le stalagmiti; il calcare sottostante alla patina risulta solo parzialmente alterato, rappresentando esso lo stadio definitivo di tale processo, non essendo più intervenuti, dopo l'asportazione del deposito di guano, i fattori determinanti la trasformazione predetta. Il fenomeno comunque conferma, sia pure ristretto ad una modesta azione locale, quanto è ormai noto sulla origine di taluni fosfati in natura.

4. *Considerazioni del fenomeno nel quadro del ciclo geochimico del fosforo.* — E' noto che i fosfati naturali, dai più comuni a quelli più rari, trovano la loro origine o in rocce ignee (basalti, trachiti ecc.), o per deposizione in bacini ricchi di carbonato di calcio in soluzione con relativa riprecipitazione del fosforo solubile, o in fenditure di rocce calcaree, o infine per deposizione organica e ertanto connessa geneticamente a resti di esseri organici, come di norma si può osservare nel guano. Nelle naturali cavità del suolo, i resti di animali ed i loro escrementi, sotto l'azione di particolari batteri, talora nitrificanti, si sono trasformati in fosfati e nitrati, ricavando dalle pareti calcaree il calcio necessario alla formazione di depositi minerali.

I fenomeni osservabili nella grotta della Zinzulusa si possono ascrivere all'ultimo tipo considerato e per essi si possono richiamare talune reazioni generali che normalmente ricorrono per spiegare la genesi organica di fosfati e di rocce fosfatizzate [1]). La materia organica, per azione di batteri, si trasforma in NH_3, H_2, N_2 ed acido carbonico e poi in composti fosforati fissi e volatili (fase di riduzione). Successivamente, per azione diretta dell'ossigeno dell'aria o per azione di fermenti aerobi, l'ammo-

---

[1]) Gautier A., *Sur la genèse des phosphates naturels, et en particulier de ceux qui ont emprunté leur phosphore aux êtres organisés.* Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, t. 116, I° sem., pag. 1271-76, Paris, 1893. — Id., *Sur un gisement de phosphates de chaux et d'alumine contenant des espèces rares ou nouvelles et sur la genèse des Phosphates et Nitres naturels.* Annales des Mines, Memor. V, 1894.

niaca viene ossidata ad acido nitrico ed i composti fosforati ad acido fosforico (fase di ossidazione). Quest' ultima trasformazione riguarda sopratutto le fosfine prodotte nella prima fase; il fosforo che è legato ai composti coniugati dà a sua volta, durante il processo di fermentazione, fosfato ammonico, che rappresenta d' altronde il composto definitivo solubile al quale si perviene attraverso la vasta gamma delle reazioni considerate. Tali composti fosforati, contenuti nel guano, oppure solubilizzati dalle acque e trasportati per naturale deflusso o per capillarità di esse su pareti calcaree, a contatto con tali rocce, traggono il calcio indispensabile alla loro deposizione come minerali o mescolanze di minerali insolubili.

E' pertanto intuitivo che a questo scambio metasomatico tra fosfati e calcare debba essere legata l' assenza di concrezioni stalattitiche nel corridoio d' accesso e nei due vani terminali della grotta considerata: le soluzioni contenenti il bicarbonato disciolto — per non parlare delle pareti nelle quali si verificava il contatto diretto col guano — erano impegnate a reagire con quelle contenenti fosfati e in minor parte nitrati ammonici, con il relativo scambio metasomatico che naturalmente si verificava.

Presumibilmente poi l' eccesso di acido carbonico, che, com' è noto, si libera nei processi fermentativi organici, doveva contemporaneamente far sentire la sua influenza nell' equilibrio carbonato-bicarbonato, cui è legata la solubilizzazione e la deposizione calcarea.

I dati analitici riportati precedentemente consentono di precisare che la trasformazione dei calcari della Zinzulusa deve essersi svolta secondo le modalità descritte, ma disugualmente nei vari punti della cavità (Duomo) e del corridoio. Le analisi dei vari campioni mostrano difatti che il tenore in P_2O_5 — e quindi la relativa percentuale di fosfato — diminuisce dal basso in alto ed ancor più verso l' esterno, giacchè logicamente nei punti in cui non esisteva il contatto diretto con il deposito di guano, l' azione metasomatica dovette essere svolta dalle acque ricche di fosfati solubili, che per capillarità risalirono lungo le pareti, attenuando quindi la trasformazione del calcare.

La serie dei fenomeni descritti si inserisce nel ciclo geochimico del fosforo [1] [2], (e subordinatamente dell' azoto) in natura, nel senso che, se una parte di quell' elemento viene sottratta almeno temporaneamente durante la deposizione del guano, che in un primo tempo, per azione biochimica, risulta assai ricco di fosfati e nitrati, in un recondo tempo l' elemento viene rimesso in ciclo per effetto della solubilizzazione dei sali di cui è

[1] Rankama K. e Sahama TH. G, *Geochemistry*. Chicago, 1949.

[2] Charles G., *Cycle géochimique du phosphore et formation dans l' ecorce terrestre d' amas de mineraux phosphates d' origine sedimentaire*. Congrés Géologique International, vol. 11, pag. 161-162. Alger, 1952-53

fondamentalmente costituito (monetite, struvite, stercorite). Tali soluzioni esercitano quindi notevole azione metasomatica tanto su rocce ignee, quanto su rocce sedimentarie calcaree, come è stato osservato nel corso del presente lavoro.

La trasformazione in fosfato del calcare cretaceo della Zinzulusa offre così un tipico esempio del passaggio del fosforo da forme organiche a forme inorganiche, ed altresì un caso particolare di un fenomeno generale interpretabile come un ritorno in circolazione, seguìto da riprecipitazione chimica, della materia. Tale migrazione si può del resto attribuire subordinatamente anche all'azoto, secondo uno schema che in sintesi si accorda anche con quanto è stato osservato precedentemente, e cioè:

$$\text{sostanze azotate} \rightarrow NH_4^+ \rightarrow N_2O_2^{2-} \rightarrow NO_2^- \rightarrow NO_3^-$$

Tale complesso di reazioni, assai modesto in un fenomeno locale qual'è quello richiamato nella presente nota, rappresenta invece la logica spiegazione della genesi di taluni fosfati e nitrati in natura, nonchè del ciclo dei due elementi nel corso della sedimentazione di depositi, i quali, in molte zone sono non solo di enorme importanza per il loro possibile sfruttamento, ma richiamano altresì particolari condizioni chimiche e geologiche ambientali, le quali favorirono quei processi che tuttora si verificano.

Napoli, Istituto geo-paleontologico dell'Università, luglio 1954.

Termini stratigrafici locali della regione etiopica

Memoria del socio ordinario **Giotto Dainelli**

(presentata nell'Adunanza del dì 6 novembre 1954
per la inserzione nel volume in corso degli Atti)

Sunto. — Sono elencati i termini stratigrafici proposti dalla Regione Etiopica e tratti dalla toponomastica locale. Di ciascuno è indicato l'autore proponente, sono riassunti i caratteri petrografici e paleontologici, e interpretata la facies rappresentata. In base a queste conoscenze è stabilita la età relativa secondo la cronologia geologica universalmente accettata. E' evidente che quando la datazione è sicura, cade senz'altro la opportunità di conservare il termine stratigrafico locale. Resulta d'altronde come taluni dei termini proposti non possano avere significato cronologico, corrispondendo a facies ripetutesi in età successive: e quindi tendano a ingenerare errori di interpretazione delle condizioni stratigrafiche locali.

La varietà V_{22} dell'S_{39} complesso determinata da una V''_3 dell'S_4 prolungata nell'S_4 cinqueduale

Nota del socio ordinario **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 6 novembre 1954)

Sunto. — Assegnato un modello proiettivo dell'ente algebrico ∞^3 con una ipersuperficie algebrica V''_3 irriducibile dell'S_4 complesso, si costruisce un nuovo modello proiettivo di tale ente algebrico con una V_{22} dell'S_{39}, costituita da ∞^3 S_{13} generatori. Detta V_{22} dà la rappresentazione complessa della ipersuperficie dell'S_4 cinqueduale ottenuta prolungando nel campo cinqueduale la data V_3'' dell'S_4 complesso, considerando l'algebra dei numeri cinqueduali come sottoalgebra dell'algebra di ordine 8 dei numeri quadruplo-biduali. Di tali varietà V_{22} ci siamo serviti, senza indicarne la provenienza (trattata ora in questa nota) per la determinazione di una trasformazione birazionale atta a sciogliere le singolarità della pata V_3''.

Questa nota fa seguito ad altre due, in relazione agli enti algebrici ∞^1 e ∞^2 pubblicate in questo stesso volume del Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli. In essa come in quella relativa allo ente algebrico ∞^2, si studia pure la trasformazione T dell'S_{39} che si ottiene con la rappresentazione complessa della trasformazione prolungamento nel campo cinqueduale di una trasformazione birazionale assegnata nell'S_4 complesso, ed il comportamento di tale trasformazione T in relazione agli S_{13} generatori della V_{22} sudetta e della V_{26} in cui varia la V_{22} al variare della ipersuperficie V_3'' nell'S_4 complesso.

1. *L'algebra dei numeri cinqueduali come sottoalgebra dell'algebra dell'* 8° *ordine dei numeri quadruplo-biduali.*

Nell'algebra dei numeri quadruplo-biduali (somma diretta di quattro algebre equivalenti all'algebra dei numeri duali), con le unità $u_1, u_2, \ldots, u_8$ e la tabella di moltiplicazione

(4)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_1	u_1	u_2	0	0	0	0	0	0
u_2	u_2	0	0	0	0	0	0	0
u_3	0	0	u_3	u_4	0	0	0	0
u_4	0	0	u_4	0	0	0	0	0
u_5	0	0	0	0	u_5	u_6	0	0
u_6	0	0	0	0	u_6	0	0	0
u_7	0	0	0	0	0	0	u_7	u_8
u_8	0	0	0	0	0	0	u_8	0

ed il modulo

(2) $$u = u_1 + u_3 + u_5 + u_7,$$

considariamo il sistema determinato dal modulo u e dalle quattro unità di indice pari u_2 , u_4 , u_6 , u_8, costituito dai numeri

(3) $$\mu = xu + yu_2 + zu_4 + tu_6 + qu_8.$$

Tale sistema costituisce un' algebra (del quinto ordine) perchè il prodotto di due elementi del tipo (3) risulta, per la tabella di moltiplicazione (1), un elemento dello sistema (3). Assumendo in questa sottoalgebra di ordine 5, dell' algebra data di ordine 8, come unità u , u_2 , u_4 , u_6 , u_8, si ha, per essa, la tabella di moltiplicazione

(4)

	u	u_2	u_4	u_6	u_8
u	u	u_2	u_4	u_6	u_8
u_2	u_2	0	0	0	0
u_4	u_4	0	0	0	0
u_6	u_6	0	0	0	0
u_8	u_8	0	0	0	0

,

come si verifica tenendo conto della tabella (1) e della posizione (2) che dà il modulo dell' algebra. Ora la tabella (4) non è altro che la tabella di moltiplicazione dei *numeri cinqueduali*. Si ha perciò:

I) *L' algebra dei numeri quadruplo-biduali contiene una sottoalgebra equivalente all' algebra dei numeri cinqueduali. Essa è determinata dal modulo u e dalle unità* u_2, u_4, u_6, u_8, *che moltiplicano fra di loro con la tabella* (4).

Si noti esplicitamente che un numero quadruplo-biduale

$$\eta = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_8 u_8 \tag{5}$$

risulta appartenente alla sottoalgebra di tabella (4), quando e solo quando è $x_1 = x_3 = x_5 = x_7$ infatti posto in tal caso $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_4 = z$, $x_6 = t$, $x_8 = q$ la (5) ci dà l' elemento μ dato dalla (3). Sicchè:

II) *I numeri quadruplo-biduali* η *dati dalla* (5) *che costituiscono la sottoalgebra equivalente all' algebra dei numeri cinqueduali sono quelli che hanno le coordinate di indice dispari* x_1, x_3, x_5, x_7 *eguali fra di loro.*

Si noti che gli elementi del tipo $x_1 u_1 + x_2 u_2$ costituiscono una sottoalgebra del secondo ordine equivalente a quella dei numeri biduali. Infatti si ha che due elementi di tale tipo danno per prodotto un elemento dello stesso sistema e le due unità u_1 , u_2 si moltiplicano con la tabella di moltiplicazione

(6)

	u_1	u_2
u_1	u_1	u_2
u_2	u_2	0

dei numeri biduali. Analoga osservazione si fa per gli altri tre sistemi descritti dai tre elementi $x_3 u_3 = x_4 u_4$, $x_5 u_5 + x_6 u_6$, $x_7 u_7 + x_8 u_8$. Si hanno perciò quattro sottoalgebre di ordine due, tutte e quattro equivalenti all' algebra dei numeri biduali. La somma degli elementi correnti in tali sottoalgebre dà l' elemento (5) variabile nell' algebra. Inoltre il prodotto di un elemento di una tale sottoalgebra per un elemento di una altra delle altre sottoalgebre, risulta sempre nullo, per la tabella (1), e quindi la data algebra di ordine 8 è *somma diretta* delle suddette sue quattro sottoalgebre del secondo ordine, equivalenti all' algebra dei numeri biduali. Ciò giustifica la denominazione di numeri quadruplo-biduali data agli elementi dell' algebra data di tabella (1).

Per mettere i numeri quadruplo-biduali sotto forma di matrici qua-

drate di ordine 8 basta moltiplicare un tale numero η dato dalla (5) per le 8 unità u_j e considerare la matrice dei coefficienti dei prodotti ηn_j. Si ha precisamente la matrice

$$(7) \qquad X = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_7 \end{Vmatrix}.$$

Per $x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = x$, $x_2 = y$, $x_4 = z$, $x_6 = t$, $x_8 = q$ si ha la matrice del tipo

$$(8) \qquad M = \begin{Vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{Vmatrix}.$$

Si ha perciò:

III) *Considerando i numeri quadruplo-biduali sotto forma di matrici del tipo* (7), *la sottoalgebra dei numeri cinqueduali risulta costituita dalle matrici del tipo* (8).

Si noti esplicitamente che il modulo dell'algebra dei numeri cinqueduali dati dalle matrici del tipo (8) si ha per $x = 1$ e $y = z = t = q = 0$, ed è dato, perciò dalla *matrice identica* U di ordine 8, aventi non nulli e tutti eguali ad 1, solo gli elementi della diagonale principale.

2. *La congruenza* (S_7) *dell'* S_{28} *complesso costituente la* I^a *rappresentazione complessa dell'* S_4 *quadruplo-biduale.*

Nell'S_4 *quadruplo-biduale* consideriamo un punto di coordinate quadruplo-biduali (X , Y , Z , T , Q) (di caratteristica massima) e definite a meno di un fattore quadruplo-biduale non nullo, nè divisore dello zero. Posto:

$$(9) \qquad X = \Sigma x_j u_j \,,\; Y = \Sigma y_j u_j \,, \ldots, Q = \Sigma q_j u_j$$

deve essere, pertanto, di caratteristica massima la matrice ad otto righe e 40 colonne composta con le cinque matrici del tipo (7) rappresentanti tali 5 numeri quadruplo-biduali X , Y , . . . , Q, cioè la matrice:

$$(10) \quad \left\| \begin{array}{cccccccccccccccccccc} x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_1 & q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_7 & x_8 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_7 & q_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_8 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_7 \end{array} \right\|$$

Nell' S_{39} complesso proiettivo gli 8 punti P_j aventi per coordinate le 8 righe della matrice (10), essendo questa per ipotesi di caratteristica massima, risultano indipendenti. Essi determinano, pertanto, un S_7 che si dice immagine nella I^a rappresentazione complessa, del punto quadruplo-biduale (X , Y , Z , T , Q) considerato nell' S_4 quadruplo-biduale, in quanto alla quintupla (KX , KY , KZ , KT , KQ), con K numero quadruplo-biduale, non nullo nè divisore dello zero, corrisponde nell' S_{39} lo stesso S_7.

Variando il punto (X , Y , . . . , Q) nell' S_4 quadruplo-biduale l' S_7 che lo rappresenta nell' S_{39} complesso descrive *una congruenza* (S_7) *che dà la* I^a *rappresentazione complessa dell'* S_4 *quadruplo-biduale.*

Indicando con A_1 , A_2 , . . . , A_{39} i punti fondamentali del sistema di coordinate proiettive dell' S_{39}, ed indicando con η_j ($j = 1 , 2 , \ldots , 8$) l' S_4 congiungente i 5 punti A_j , A_{j+8} , A_{j+16} , A_{j+24} , A_{j+32}, si scorge che:

a) i punti P_2 , P_4 , P_6 , P_8 aventi per coordinate la 2^a , 4^a , 6^a e 8^a riga della matrice (10) variano, rispettivamente, nei 4 S_4 η_2 , η_4 , η_6 ed η_8.

b) I punti P_1 , P_3 , P_5 , P_7, rispondenti alle righe di posto dispari della (10), variano, rispettivamente nei quattro S_5 congiungenti le quattro coppie di S_4 (η_1 , η_2) , (η_3 , η_4) , (η_5 , η_6) , (η_7 , η_8), con le condizioni che le coordinate di posto dispari devono risultare proporzionali alle coordinate di posto pari dei quattro punti P_2 , P_4 , P_6 , P_8, rispettivamente, supposti già fissati in η_2 , η_4 , η_6 , η_8 per la proprietà *a*).

Si noti inoltre che la retta $P_1 P_2$ dentro l' $S_6 = \eta_1 \eta_2$ descrive la congruenza che dà la prima rappresentazione complessa dell' S_4 biduale, dato che in tale S_7 le coordinate di P_1 e P_2 sono le due righe della matrice

$$(10) \quad \left\| \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & z_1 & z_2 & t_1 & t_2 & q_1 & q_2 \\ 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 & z_1 & 0 & t_1 & 0 & q_1 \end{array} \right\|$$

composta con cinque matrici quadrate del 2° ordine rappresentanti cinque numeri biduali.

Analogamente si scorge che la retta $P_3\,P_4$ dentro l'$S_9 = \eta_3\,\eta_4$, la retta $P_5\,P_6$ dentro l'$S_9 = \eta_5\,\eta_6$ e la retta $P_7\,P_8$ dentro l'$S_9 = \eta_7\,\eta_8$, descrivono rispettivamente, una analoga congruenza di rette rappresentante sempre l'S_4 biduale. Ciò dipende dalla proprietà dell'algebra dei numeri quadruplo-biduali di essere somma diretta di quattro algebre equivalenti all'algebra dei numeri biduali. Tenendo conto l'S_7 congiungente gli 8 punti $P_1, \ldots, P_8$ si può considerare ottenuto congiungendo le quattro rette $P_1\,P_2$, $P_3\,P_4$, $P_5\,P_6$ e $P_7\,P_8$, segue che:

I) *Gli* S_7 *della congruenza* (S_7) *dell'* S_{39} *che dà la* I^a *rappresentazione complessa dell'* S_4 *quadruplo-biduale si ottengono congiungendo le quaterne di rette* $P_1\,P_2$, $P_3\,P_4$, $P_5\,P_6$, $P_7\,P_8$ *delle tre congruenze di rette che danno, nei quattro* S_9 *determinati dalle quattro coppie dell'* S_4 (η_1, η_2), (η_3, η_4), (η_5, η_6), (η_7, η_8), *ciascuna, la rappresentazione dell'* S_4 *biduale.*

Si noti ora che, per es., le rette della suddetta congruenza nell'$S_9 = \eta_1\eta_2$ sono ∞^8 ed appoggiate tutte all'S_4 η_2, e quelle uscenti da uno stesso punto P_2 di η_2 costituiscono una stella ∞^4 rette dentro l'S_5 passante per η_2 e corrispondente a P_2 in una proiettività fra questo S_4 η_2 e la stella di S_5 in S_9 avente per vertice lo stesso S_4 η_2.

Gli S_7 della congruenza (S_7) dell'S_{39} sono ∞^{32}, rispondenti alle quaterne di rette di dette quattro congruenze, e sono le immagini dei punti dell'S_4 quadruplo-biduale [che ha la dimensione complessa 32, essendo di ordine 8 l'algebra dei numeri quadruplo-biduali].

Fissati i quattro punti P_2, P_4, P_6, P_8 rispettivamente in $\eta_2, \eta_4, \eta_6, \eta_8$, restano, pertanto, fissati quattro S_5 passanti, rispettivamente, per η_2, η_4, η_6 ed η_8, dove variano le quattro rette $P_1\,P_2$, $P_3\,P_4$, $P_5\,P_6$, $P_7\,P_8$. Tali quattro S_5 sono congiunti da un S_{23} passante per l'$S_{19} = \eta_2\,\eta_4\,\eta_6\,\eta_8$ e questo S_{23} sarà riempito dagli ∞^{16} S_7 di (S_7) passanti per i quattro punti fissati P_2, P_4, P_6 e P_8. Si ha perciò:

II) *Gli* ∞^{32} S_7 *della congruenza* (S_7) *immagine dell'* S_4 *quadruplo-biduali nell'* S_{39}, *sono distribuiti, ad* ∞^{16} *ad* ∞^{16} *in* ∞^{16} S_{23} *passanti per l'* $S_{19} = \eta_2\,\eta_4\,\eta_6\,\eta_8$.

3. *Gli* ∞^{20} S_7 *della congruenza* (S_7), *immagine dell'* S_4 *quadruplo-biduale, immagini dei punti dell'* S_4 *quadriduale.*

Nel n° 1 abbiamo notato che l'algebra dei numeri quadruplo-biduale contiene una sottoalgebra equivalente all'algebra dei numeri cinqueduali. Ne segue che dentro l'S_4 quadruplo biduali contiene una sottoalgebra equivalente all'algebra dei numeri cinqueduali. Ne segue che dentro l'S_4 quadruplo-biduale c'è luogo a considerare l'S_4 cinqueduale. Precisamente un punto (X, Y, Z, T, Q) dell'S_4 quadruplo-bibuale apparterrà all'S_4 cin-

queduale quando le sue coordinate appartengono, in particolare, a detta sottoalgebra cinqueduale.

Cioè, messe le coordinate sottoforma di matrici quadrate di ordine 8 del tipo (7), si considerino, in particolare, quelle del tipo (8). In tal caso la matrice (10) avrà gli elementi soddisfacenti alle condizioni

$$(12) \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 = x_5 = x_7 \\ y_1 = y_3 = y_5 = y_7 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_1 = q_3 = q_5 = q_7. \end{cases}$$

Ne segue che i quattro punti P_2 , P_4 , P_6 , P_8 aventi per coordinate le quattro righe di posto pari nella matrice (10) si corrispondono nelle proiettività fra i quattro S_4 η_2 , η_4 , η_6 ed η_8 di equazioni (12), v [in cui, cioè, punti corrispondenti hanno eguali coordinate]. Si ha perciò:

I) *Gli* ∞^{20} S_5 *della congruenza* (S_5) *che rappresentano i punti della* S_4 *cinqueduale contenuto nell'* S_4 *quadruplo-biduale, sono quelli i cui punti di appoggio* P_2 , P_4 , P_6 , P_8 *nei quattro* S_4 η_2 , η_4 , η_6 *ed* η_8, *si corrispondono nelle proiettività fra detti* S_4 *di equazioni* (12).

Ne segue che [tenendo conto della proprietà II) del n° precedente] si ha:

II) *Gli* ∞^{20} S_5 *che rappresentano in* S_{39} *i punti dell'* S_4 *cinqueduale si distribuiscono, a* ∞^{16} *ad* ∞^{16}, *in* ∞^4 S_{23} *passanti per l'* $S_{19} = \eta_2\eta_4\eta_6\eta_8$.

4. *Prolungamento di una ipersuperficie algebrica dell'* S_4 *complesso nell'* S_4 *cinqueduale e sua rappresentazione complessa nell'* S_{39} *ambiente della congruenza* (S_5).

Nell'S_4 complesso consideriamo una ipersuperficie algebrica V_3^n di ordine $n > 1$, irriducibile di equazione

$$(13) \qquad f(x, y, z, t, q) = 0.$$

Sostituendo nella forma $f(x, \ldots, q)$ alle cinque variabili complesse le variabili quadruplo-biduali X , Y , Z , T , Q, si ha l'equazione

$$(14) \qquad f(X, Y, Z, T, Q) = 0$$

che rappresenta nell'S_4 quadruplo-biduale la ipersuperficie prolungamento della V_3^n complessa in detto S_5 supercomplesso, ipersuperficie che sarà

rappresentata, nell'S_{39}, dalla varietà, [composta con la congruenza (S_7), che rappresenta l'S_4 quadruplo-biduale] ed avente per equazioni le 8 equazioni nel campo complesso equivalenti alla (14) nel campo quadruplo.biduale; equazioni che si ottengono sostituendo nella (14) alle 5 variabili quadruplo-biduali le loro espressioni (9) come combinazioni lineari delle 8 unità $u_1, \ldots, u_8$, eseguendo i calcoli, tenendo conto della tabella di moltiplicazione (1), ed eguagliando a zero la forma n che risultano a coefficienti di dette unità. Si ottiene così il sistema:

$$(15)\qquad \begin{cases} f(x_1, y_1, \ldots, q_1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} x_2 + \dfrac{\partial f}{\partial y_1} y_2 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial q_1} q_2 = 0 \\ f(x_3, y_3, \ldots, q_3) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} x_4 + \dfrac{\partial f}{\partial y_3} y_4 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial q_3} q_4 = 0 \\ f(x_5, y_5, \ldots, q_5) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_5} x_6 + \dfrac{\partial f}{\partial y_5} y_6 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial q_5} q_6 = 0 \\ f(x_7, y_7, \ldots, q_7) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_7} x_8 + \dfrac{\partial f}{\partial y_7} y_8 + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial q_7} q_8 = 0 \end{cases}$$

Volendo, in particolare, prolungare la ipersuperficie complessa V_3'' dell'S_4 complesso nell'S_4 cinqueduale, *servendoci dell'algebra dei numeri cinqueduali come sottoalgebra dei numeri quadruplo-biduali,* basta imporre alle cinque variabili X, Y, Z, T, Q le condizioni che variino, in particolare, nella sottoalgebra cinqueduale, cioè bisogna imporre le condizioni:

$$(16)\qquad x_1 = x_3 = x_5 = x_7 \;;\; y_1 = y_3 = y_5 = y_7 \;;\; \ldots \;;\; q_1 = q_3 = q_5 = q_7,$$

da aggregare alle (15); e così degli S_7 della congruenza (S_7) che compongono la varietà di equazioni (15), si verranno a considerare solo quelli che rappresentano punti cinqueduali, e costituiranno la varietà che rappresenta nell'S_{39}, la ipersuperficie dell'S_4 cinqueduale prolungamento della data ipersuperficie V_3'', assegnata nell'S_4 complesso. Si ha perciò:

I) *La ipersuperficie, dell'* S_4 *complesso, di equazione* (13), *prolungata nell'* S_4 *cinqueduale, da una ipersuperfie i cui punti cinqueduali sono rappresentati dagli* S_7 *della congruenza* (S_7) *dell'*S_{39} *costituenti la varietà di equazioni* (15) *e* (16).

Si osservi ora che se un punto

$$B\,(x_1\,,\ldots,x_8\,,\quad y_1\,,\ldots,y_8\,,\ldots,q_1\,,\ldots,q_8)$$

dell'S_{39} soddisfa con le sue coordinate alle (15) e (16), detti $B_1\,,\ldots,B_8$ gli otto punti proiezioni di B in ciascuno degli otto S_4 $\eta_1\,,\ldots,\eta_8$, dallo iperspazio opposto congiungente i rimanenti sette S_4 η_j, [il punto B_j si ottiene quindi da B annullando in questa tutte le coordinate $x_s\,,y_s\,,z_s\,,t_s\,,q_s$ con $s\neq j$] risulta che:

a) *I punti* $B_1\,,B_3\,,B_5\,,B_7$ *degli* S_4 $\eta_1\,,\eta_3\,,\eta_5\,,\eta_7$ *si corrispondono nelle proiettività, fra questi* S_4, *di equazioni* (16).

b) *Tali punti* $B_1\,,B_3\,,B_5\,,B_7$ *appartengono alle quattro* V_3'' *dei quattro* S_4 $\eta_1\,,\eta_3\,,\eta_5\,,\eta_7$, *di equazioni prima, terza, quinta e settima del sistema* (15). *Tali ipersuperficie, diciamo* $V_3^{(j)}$ $(j=1\,,3\,,5\,,7)$ *risultano proiettive alla data ipersuperficie* V_3'' *nell'* S_4 *di equazione* (13).

c) *I punti* $B_2\,,B_4\,,B_6\,,B_8$, *supposti fissati* $B_1\,,B_3\,,B_5\,,B_7$, *soddisfacenti alle condizioni* a) *e* b), *appartengono, rispettivamente ai quattro iperpiani tangenti alle ipersuperfie* $V_3^{(j)}$, *con* $j=2\,,4\,,6\,,8$, *proiettive alla data* V_3'' *nelle proiettività di equazioni*

$$(17)\qquad x=x_j\,,\quad y=y_j\,,\quad z=z_j\,,\quad t=t_j\,,\quad q=q_j\quad,\qquad (j=1,2,\ldots,8)$$

con i punti di contatto, rispettivamente, nei quattro punti omologhi di $B_1\,,B_3\,,B_5\,,B_7$ *in dette proiettività. Tali iperpiani hanno le equazioni seconda, quarta, sesta e ottava del sistema* (15), [*nei quattro* $S_4\eta_2,\eta_4,\eta_6,\eta_8$]. Nel seguito saranno indicati con $\pi_2\,,\pi_4\,,\pi_6\,,\pi_8$.

d) *Quando le proprietà* a), b), c) *sono soddisfatte l'* S_{19} *congiungente i quattro punti* $B_1\,,B_3\,,B_5\,,B_7$ *con i quattro* S_3 $\pi_2\,,\pi_4\,,\pi_6\,,\pi_8$, *appartiene alla varietà rappresentata nell'* S_{39} *dalle equazioni* (15) *e* (16).

Di tali S_{19} se ne ha uno per ogni punto semplice della V_3'' fissata nella S_4 complesso. Detta varietà conterrà perciò ∞^3 S_{19} generatori rispondenti agli ∞^3 punti semplici della V_3'' e alle loro posizioni limiti al tendere di un punto semplice ad un eventuale punto multiplo della V_3''.

Si osservi ora che se $(x\,,y\,,z\,,t\,,q)$ sono le coordinate di un punto multiplo della V_3'' dell'S_4, conseguentemente si annullano in esso l^e derivate prime della forma $f\,(x\,,y\,,z\,,t\,,q)$ a primo membro della (13), le equazioni seconda, quarta, sesta e ottava (nelle incognite con indici pari e lineari in queste incognite) risultano identicamente soddisfatte. In tal caso, detti ancora B_1 B_3, B_5 e B_7 i punti delle $V_3^{(j)}$ $(j=1\,,3\,,5\,,7)$ rispondenti a detto punto multiplo della V_3'', tutto l'S_{23} congiungente $B_1\,,B_3\,,B_5\,,B_7$ e i quattro S_4 $\eta_2\,,\eta_4\,,\eta_6$ ed η_1 apparterrà alla varietà rappresentata dalle equazioni (15) e (16). Si ha pertanto:

II) *La varietà dell'* S_{39} *complesso che rappresenta il prolungamento nel campo cinqueduale della* V_3'' *dell'* S_4 *complesso di equazione* (13) [*rappresentata dal sistema di otto equazioni di grado n* (15), *e di quindici equazioni lineari* (16)] *è costituita:*

a) *da eventuali* S_{23} *rispondenti agli eventuali punti multipli di* V_3'' *:*

b) *da* ∞^3 S_{19} *rispondenti ai punti semplici della* V_3''.

Si ha inoltre che:

II') *Detta* $V_3^{(j)}$ *la ipersuperficie dell'* S_4 η_j ($j = 1, 2, \ldots, 8$), *di equazione* $f(x_j, y_j, z_j, t_j, q_j) = 0$, *e detto* B_j *il punto di* $V_3^{(j)}$ *rispondente per le* (17) *ad un punto semplice* (x, y, z, t, q) *della* V_3'', *l'* S_{19} *rispondente a tale punto semplice è quello congiungente i quattro punti* B_1, B_3, B_5, B_7 *con i quattro* S_3 *tangenti alle quattro ipersuperficie* $V_3^{(j)}$ ($j = 2, 4, 6, 8$) *rispettivamente nei quattro punti* B_2, B_4, B_6 *e* B_8. *Detto ancora* B'_j *il punto* $V_3^{(j)}$ *rispondente di un punto multiplo* M *della* V_3'', *l'* S_{23} *rispondente a questo multiplo è quello congiungente i quattro punti* B'_1, B'_3, B'_5, B'_7 *con i quattro* S_4 $\eta_2, \eta_4, \eta_6, \eta_8$.

Diciamo V_{22} la varietà riempita dagli ∞^3 S_{19} rispondenti agli ∞^3 punti semplici della V_3'' e dalle posizioni limiti di un tale S_{19} al tendere del punto semplice P che lo determina, variando sulla V_3'', ad un punto multiplo M della V_2'', considerando tutti gli eventuali punti multipli della V_2''. L'S_{19} rispondente a P col tendere di P ad un punto multiplo M tenderà ad un S'_{19} dell'S_{23} rispondente al punto multiplo M. Tale S_{19} congiungerà i punti B'_1, B'_3, B'_5, B'_7 con i quattro iperpiani $\pi'_2, \pi'_4, \pi'_6, \pi'_8$ posizioni limiti dei quattro iperpiani tangenti a $V_3^{(j)}$ ($j = 2,4,6,8$) dei punti B_2, B_4, B_6, B_8 con tendere di P ad M, e quindi dell'iperpiano tangente alla V_2'' in P ad un iperpiano tangente a V_2'' nel punto multiplo M. Si ha perciò:

III) *La ipersuperficie* V_3'' *dell'* S_4 *complesso determina nell'* S_{39} *una varietà* V_{22} *costituita da* ∞^3 S_{19} *generatori in corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, con le coppie punto-iperpiano* (P,π), *con* P *variabile nella* V_3'' *e* π *iperpiano tangente alla* V_3'' *in* P, *considerando anche le posizioni limiti di tali coppie* (P,π) *col tendere di* P *ad eventuale punto multiplo della* V_3''.

Si osservi esplicitamente che:

La V_{22} *con i suoi* ∞^3 S_{19} *generatori dà un modello proiettivo dello ente algebrico* ∞^3 *di cui la data ipersuperficie algebrica irriducibile* V_3'' *dell'* S_4 *costituisce già un altro modello proiettivo.*

5. *La varietà* V_{26} *dell'* S_{39} *descritta dalla* V_{22} *al variare della* V_3'' *nell'* S_4.

Variando la V_3'' fra le ipersuperficie algebriche dell'S_4, la V_{22} ad essa corrispondente nell'S_{39} varierà, senza descrivere tutto l'S_{39}, ma solo una varietà V_{26}, costituita da ∞^7 S_{19}, perchè un S_{19} generatore di una detta V_{22} congiunge sempre quattro punti B_1,B_3,B_5,B_7 di $\eta_1,\eta_3,\eta_5,\eta_7$ e quattro S_3 π_2,π_4,π_6,π_8 di $\eta_2,\eta_4,\eta_6,\eta_8$ passanti, rispettivamente, per i quattro punti B_2,B_4,B_6,B_8, con la condizione che sia i punti sia gli iperpiani si corrispondano nelle proiettività fra gli S_4 η_i ed η_i in cui si corrispondono i punti $P_i(x_i,y_i,z_i,t_i,q_i)$ e $P_j(x_j,y_j,z_j,t_j,q_j)$ aventi eguali coordinate. Tali S_{19} sono pertanto, in corrispondenza biunivoca con le coppie punto-iperpiano appartenentisi di un S_4, e quindi sono ∞^7. Essi costituiranno un sistema che indicheremo con $((S_{19}))$. Si ha perciò:

I) *Gli* ∞^3 S_{19} *della* V_{22} *di* S_{39}, *rispondente alla ipersuperficie* V_3'' *dell'* S_4, *variano, al variare della* V_3'', *in un sistema* $((S_{19}))$ *di* ∞^7 S_{19}, *costituenti una varietà* V_{26}, *in corrispondenza biunivoca con le* ∞^7 *coppie punto-iperpiano appartenente dell'* S_4.

Se indichiamo con (x,y,z,t,q) le coordinate di B_j con $(j=1,2,...,8)$ e con $(x',...,q')$, $(x'',...,q'')$, $(x''',...,q''')$ le coordinate di altri tre punti C_i,D_i,E_i di η_i con $(i=2,4,6,8)$ non complanari con B_i, (e quindi con i quattro punti B_i,C_i,D_i,E_i determinati in η_i un iperpiano π_i) combinando linearmente, secondo i parametri $\rho_1,\rho_2,...,\rho_{20}$, i detti punti, nell'ordine

$$B_1\,B_2\,C_2\,D_2\,E_2 \quad B_3\,B_4\,C_4\,D_4\,E_4 \quad B_5\,B_6\,C_6\,D_6\,E_6 \quad B_7\,B_8\,C_8\,D_8\,E_8,$$

si ottengono le equazioni parametriche dell'S_{19} del sistema $((S_{19}))$ che essi determinano. Si ha perciò:

II) *Le equazioni parametriche di un* S_{19} *generatore del sistema* $((S_{19}))$ *della* V_{26} *di* S_{39} *sono del tipo:*

$$[S_{19}]\quad \begin{cases} x_1 = \rho_1 x \\ x_2 = \rho_2 x + \rho_3 x' + \rho_4 x'' + \rho_5 x''' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_1 = \rho_1 q \\ q_2 = \rho_2 q + \rho_3 q' + \rho_4 q'' + \rho_5 q''' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_7 = \rho_{16} x \\ x_8 = \rho_{17} x + \rho_{18} x' + \rho_{19} x'' + \rho_{20} x''' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_7 = \rho_{16} x \\ q_8 = \rho_{17} x + \rho_{18} x' + \rho_{19} x'' + \rho_{20} q''' \end{cases}$$

con i 20 *parametri* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{20}$.

·6. *Prolungamento di una trasformazione birazionale dell'* S_4 *complesso nell'* S_4 *cinqueduale e sua rappresentazione complessa nell'* S_{30}.

Consideriamo nell'S_4 complesso una trasformazione birazionale di equazioni

$$(18)\qquad \begin{cases} x' = F(x, y, z, t, q) \\ y' = G(x, y, z, t, q) \\ z' = H(x, y, z, t, q) \\ t' = K(x, y, z, t, q) \\ q' = L(x, y, z, t, q) \end{cases}$$

con

$$(19)\quad aF(x,...,q)+bG(x,...,q)+cH(x,...,q)+dK(x,...,q)+eL(x,...,q)=0$$

sistema omaloidico di ipersuperficie di S_4.

Prolungando le cinque forme F, G, H, K, L nel campo quadruplo-biduale il sistema (18) ci dà le equazioni

$$(20)\qquad \begin{cases} X' = F(X, Y, Z, T, Q) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Q' = L(X, Y, Z, T. Q) \end{cases}$$

che rappresenta una trasformazione birazionale nell'S_4 quadruplo-biduale.

Il sistema (20) del campo quadruplo-biduale è equivalente nel campo complesso ad un sistema di 40 equazioni, suddiviso in quattro sottosistemi di dieci equazioni ciascuno, in corrispondenza alle quattro coppie di indici (1,2), (3,4), (5,6), (7,8), di cui il primo è:

$$(21)_{1,2}\qquad \begin{cases} x'_1 = F(x_1, y_1, z_1, t_1, q_1) \\ x'_2 = \dfrac{\partial F}{\partial x_1} x_2 + \dfrac{\partial F}{\partial y_1} y_2 + \dfrac{\partial F}{\partial z_1} z_2 + \dfrac{\partial F}{\partial t_1} t_2 + \dfrac{\partial F}{\partial q_1} q_2 \\ y'_1 = G(x_1, y_1, z_1, t_1, q_1) \\ y'_2 = \dfrac{\partial G}{\partial x_1} x_2 + \dfrac{\partial G}{\partial y_1} y_2 + \dfrac{\partial G}{\partial z_1} z_2 + \dfrac{\partial G}{\partial t_1} t_2 + \dfrac{\partial G}{\partial q_1} q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q'_1\quad L(x_1, y_1, z_1, t_1, q_1) \\ q'_2 = \dfrac{\partial L}{\partial x_1} x_2 + \dfrac{\partial L}{\partial y_1} y_2 + \dfrac{\partial L}{\partial z_1} z_2 + \dfrac{\partial L}{\partial t_1} t_2 + \dfrac{\partial L}{\partial q_1} q_2 \end{cases}$$

Gli altri tre sistemi si ottengono dal sistema $(21)_{1,2}$ sostituendo alla coppia di indici (1,2) le tre coppie di indici (3,4), (5,6), (7,8).

Nello iperspazio S_{39} le 40 equazioni del sistema costituito dai quattro sottosistemi $(21)_{1,2}$, $(21)_{3,4}$, $(21)_{5,6}$, $(21)_{7,8}$ rappresentano la trasformazione, diciamo T, che dà la rappresentazione complessa della trasformazione birazionale quadruplo-biduale di equazioni (20).

Si osservi ora che il sottosistema $(21)_{1,2}$ rappresenta nell'S_9 congiungente i due S_4 η_1 ed η_2, rispondente alle dieci variabile $(x_1x_2y_1y_2z_1z_2t_1t_2q_1q_2)$ una trasformazione birazionale che trasforma in sè stessa la congruenza di rette P_1P_2 rispondenti alle matrici (11), congruenza che dà in detto S_9, come abbiamo osservato nel n° 2, la prima rappresentazione complessa dell'S_4 biduale. Si ha perciò che la trasformazione T, dato che negli altri tre sottosistemi non intervengono le dette dieci variabili, ammette come unito l'$S_9 \equiv \eta_1\,\eta_2$, e vi subordina la trasformazione birazionale di equazioni $(21)_{12}$.

Analoghe osservazioni si fanno relativamente agli altri sottosistemi $(21)_{3,4}$, $(21)_{5,6}$, $(21)_{7,8}$ per gli altri tre S_9 congiungenti le tre coppie di S_4 (η_3, η_4), (η_5, η_6) e (η_7, η_8). Si ha perciò che:

I) *Le* 40 *equazioni* $(21)_{1,2}, \ldots, (21)_{7,8}$ *rappresentano dell'*S_{39} *una trasformazione* T *che trasforma in sè ciascuno degli* S_9 *congiungenti le coppie di* S_4 $(\eta_1, \eta_2), \ldots, (\eta_7, \eta_8)$, *subordinandovi una trasformazione birazionale che trasforma in sè stessa la congruenza di rette* $P_1P_2, \ldots, P_7P_8$, *rispettivamente, ciascuna immagine dell'*S_4 *biduale.*

Ricordando ora che ogni S_7 della congruenza (S_7) che dà la prima rappresentazione dell'S_4 quadruplo-biduale è determinato da una quadrupla di tali rette $P_1P_2, \ldots, P_7P_8$ si ha che:

II) *La trasformazione* T *di equazioni* $(21)_{1,2}, \ldots, (21)_{7,8}$ *nell'*S_{39} *trasforma in sè stessa la congruenza* (S_7) *immagine dell'*S_4 *quadruplo-biduale.*

Si osservi ora che, volendo considerare la trasformazione assegnata nell'S_4 complesso prolungata nell'S_4 cinqueduale, anzichè nell'S_4 quadruplo-biduale, basta imporre, al solito, le condizioni (12) e quindi considerare nella congruenza (S_7) solo gli ∞^{20} S_7 che rappresentano, in S_{39}, i punti dell'S_4 cinqueduale. Tale insieme di ∞^{20} S_7 risulterà ancora trasformato in sè stessa dalla trasformazione T, perchè dalle (12) seguono, per le $(21)_{1,2}$, $(21)_{3,4}$, $(21)_{5,6}$ e $(21)_{7,8}$, le condizioni

$$(12') \qquad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x'_3 = x'_5 = x'_7 \\ y'_1 = y'_3 = y'_5 = y'_7 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q'_1 = q'_3 = q'_5 = q'_7 \end{array} \right.$$

Si ha perciò:

III) *La trasformazione* T *dell'* S_{39} *trasforma in sè stesso il sistema degli* ∞^{20} S_7 *immagini dei punti dell'* S_4 *cinqueduale* (n° 3) *subordinandovi una corrispondenza che dà la rappresentazione complessa della trasformazione birazionale cinqueduale prolungamento nel campo cinqueduale della trasformazione birazionale assegnata nell'* S_4 *complesso di equazioni* (18).

7. *Trasformazione del sistema* $((S_{19}))$ *della varietà* V_{26} *mediante la trasformazione* T.

Consideriamo un generico S_{19} del sistema $((S_{19}))$ degli ∞^7 S_{19} generatori della varietà V_{26} dell'S_{39}, di equazioni parametriche $[S_{19}]$ (n° 5). Sostituendo queste equazioni parametriche con i 20 parametri $\rho_1,...,\rho_{20}$ nelle equazioni della T, $(21)_{1,2},...,(21)_{7,8}$, si avranno le equazioni parametriche della varietà V'_{19} trasformata di S_{19} mediante la T. Verificheremo che anche queste equazioni parametriche risultano funzioni *lineari* dei 20 parametri $\rho_1,...,\rho_{20}$, e dello stesso tipo delle equazioni [19] e quindi tale V'_{19} sarà un S'_{19} ed appartenente allo stesso sistema $((S_{19}))$.

Intanto si osservi che nelle 10 equazioni $(21)_{1,2}$ intervengono solo le 10 variabili $x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2,t_1,t_2,q_1,q_2$, variabili che nelle equazioni parametriche di detto S_{19} risultano funzioni dei soli parametri $\rho_1,\rho_2,\rho_4,\rho_5$. Ne segue che, dopo la sostituzione nelle $(21)_{1,2}$, le variabili $x'_1,x'_2,y'_1,y'_2,z'_1,z'_2,t'_1,t'_2,q'_1,q'_2$ risultano funzioni dei soli parametri $\rho_1,...,\rho_5$. Si avrà precisamente, detto m il grado delle forme F,G,H,K,L

$$(23)_{1,2} \qquad \begin{cases} x'_1 = \rho_1^m \, \mathrm{F}(x, y, z, t, q) \\ x'_2 = \rho_1^{m-1} \, \mathrm{F}_d \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q'_1 = \rho_1^m \, \mathrm{L}(x, y, z, t, q) \\ q'_2 = \rho_1^{m-1} \, \mathrm{L}_d \end{cases}$$

dove s'è posto:

$$(24) \qquad \begin{aligned} \mathrm{F}_d = {} & \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(\rho_2 x + \rho_3 x' + \rho_4 x'' + \rho_5 x''') + \\ & + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(\rho_2 y + \rho_3 y' + \rho_4 y'' + \rho_5 y''') + \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q}(\rho_2 q + \rho_3 q' + \rho_4 q'' + \rho_5 q''') \end{aligned}$$

e le altre analoghe posizioni per le posizioni di G_a,K_a,H_a ed L_a in relazione alle rimanenti forme G,H,K,L.

Le variabili $x'_3,x'_4,y'_3,y'_4,\ldots,q'_3,q'_4$ risulteranno, invece, funzioni dei soli cinque parametri $\rho_6,\rho_7,\rho_8,\rho_9,\rho_{10}$ con relazioni che si ottengono dalle $(23)_{1,2}$ sostituendo agli indici 1,2 gli indici 3,4 e ai parametri $\rho_1,\ldots,\rho_5$, i parametri $\rho_6,\ldots,\rho_{10}$. Analoghe osservazioni si fanno in relazione alle variabili $x'_5,x'_6,\ldots,q'_5,q'_6$ ed infine alle variabili $x'_7,x'_8,\ldots,q'_7,q'_8$ che saranno date dalle formole $(23)_{5,6}$ e $(23)_{7,8}$ che si ottengono dalle $(23)_{1,2}$ sostituendo alla coppia di indici 1,2 la coppia 5,6 o la coppia 7,8.

Sicchè le equazioni parametriche delle V'_{19} trasformata dell'S_{19} considerato sono le $(23)_{1,2},\ldots,(23)_{7,8}$. Per dimostrare che detta V'_{19} è un S_{19} si osservi che i secondi membri delle $(23)_{1,2}$ sono tutti divisibili per ρ_1^{m-1}. Ora queste equazioni, considerate separatamente dalle altre, rappresentano le varietà proiezione della V'_{19} nell'S_9 dove variano le dieci coordinate $x_1,x_2,\ldots,q_1,q_2$ [cioè nell'$S_9 = \eta_1\ \eta_2$] dall'iperspazio opposto congiungente $\eta_3,\ldots,\eta_8$. E tale proiezione rappresentata dalle $(23)_{1,2}$ risulta un S_4, perchè eseguendo la divisione dei secondi membri per il fattore comune ρ_1^{m-1} la $x'_1,x'_2,\ldots,q'_1,q'_2$ risultano funzioni lineari omogenee dei cinque parametri $\rho_1,\ldots,\rho_5$.

Si ha, pertanto, che la V'_{19} risulta proiettata in un S_4 in ciascun dei quattro S_9 congiungenti una delle coppie di S_4 $(\eta_1,\eta_2),(\eta_3,\eta_4),(\eta_5,\eta_6),(\eta_7,\eta_8)$, dello iperspazio S_{29} opposto congiungente i rimanenti sei S_4. *Tale* V'_{19} *risulta,* pertanto, *l'intersezione di quattro* S_{34}, *e quindi è un* S'_{19}.

Facciamo vedere ora che tale S'_{19} appartiene pure al sistema $((S_{19}))$. A tal fine si osservi che le $(23)_{1,2}$, dopo aver diviso per il fattore ρ_1^{m-1}, danno le equazioni parametriche dell'S'_4 dell'$S_9 = \eta_1\ \eta_2$ nella forma

$$(25)_{1,2}\qquad \begin{cases} x'_1 = \rho_1 F \\ x'_2 = \rho_2 F + \rho_3 F' + \rho_4 F'' + \rho_5 F''' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q'_1 = \rho_1 L \\ q'_2 = \rho_2 L + \rho_3 L' + \rho_4 L'' + \rho_5 L''' \end{cases}$$

dove s'è posto

$$(26)\qquad \begin{cases} F' = \dfrac{\partial F}{\partial x}\,x' + \ldots + \dfrac{\partial F}{\partial q}\,q' \\ F'' = \dfrac{\partial F}{\partial x}\,x'' + \ldots + \dfrac{\partial F}{\partial q}\,q'' \\ F''' = \dfrac{\partial F}{\partial x}\,x''' + \ldots + \dfrac{\partial F}{\partial q}\,q''' \end{cases}$$

e le analoghe in relazione alle quattro forme G,H,K ed L.

L' $\overline{S}_4$ di equazioni parametriche $(25)_{1,2}$ in $S_9 = \eta_1\ \eta_2$ congiunge i cinque punti:

(27) $\overline{B}_1\ (F, G, H, K, L)$

di η_1 e

(28) $\overline{B}_2\ (F, \ldots, L)$, $\overline{C}_2\ (F', \ldots, L')$, $\overline{D}_2\ (F'', \ldots, L'')$, $\overline{E}_2\ (F''', \ldots, L')$

di η_2. Si noti che B_1 e B_2 hanno le stesse coordinate. Analoghe osservazioni si fanno rispetto alle equazioni $(23)_{3,4}$, $(23)_{5,6}$, $(23)_{7,8}$ e si troverà che rappresentano negli $S_9 = \eta_3\ \eta_4$, $S_9 = \eta_5\ \eta_6$, $S_9 = \eta_7\ \eta_8$ gli $\overline{S}_4$ congiungenti, rispettivamente, le tre quintuple di punti $\overline{B}_3\ \overline{B}_4\ \overline{C}_4\ \overline{D}_4\ \overline{E}_4$; $\overline{B}_5\ \overline{B}_6\ \overline{C}_6\ \overline{D}_6\ \overline{E}_6$; $\overline{B}_7\ \overline{B}_8\ \overline{C}_8\ \overline{D}_8\ \overline{E}_8$ *aventi le stesse coordinate dei cinque punti* $\overline{B}_1\ B_2\ \overline{C}_2\ \overline{D}_2\ E_2$ dati dalle (27), (28). Ciò dimostra che *l'* S'_{19} *rappppresentano dal sistema di equazioni* $(23)_{1,2},\ldots,(23)_{7,8}$ *appartiene al sistema* $((S_{19}))$.

Raccogliendo si ha:

I) *La trasformazione* T *immagine nell'* S_{39} *della trasformazione birazionale dell'* S_4 *cinqueduale, prolungamento di una trasformazione birazionale dell'* S_4 *complesso nel caso cinqueduale, trasforma in sè stesso il sistema* $((S_{19}))$ *della varietà* V_{26} *rispondente alle* ∞^7 *coppie punto-iperpiano appartenentisi dell'* S_4 *complesso.*

II) *La trasformazione* T *trasforma in particolare, gli* ∞^3 S_{19} *generatori della* V_{22}, *determinata nell'* S_{39} *dalla ipersuperficie* V_3'' *dell'* S_4 *complesso, in altri* ∞^3 S'_{19} *del sistema* $((S_{19}))$, *che costituiranno la* V'_{22} *determinata dalla ipersuperficie* V_3' *di* S_4 *trasformata della* V_3'' *per la data trasformazione birazionale in* S_4 [*che determina la* T *in* S_{39}].

Sul Solarigrafo di Gorczynski N. 327

Nota del dott. **Pio Vittozzi**, *presentata dal socio* **G. Imbò**

(Adunanza del dì 4 dicembre 1954)

Sunto. — Taratura di un solarigrafo Gorczynski per confronto con un pireliometro Ångström e determinazione degli errori.

Il solarigrafo di Gorczynki è costituito, essenzialmente, da una termopila di Moll collegata ad un millivoltmetro registratore Richard, che misura le differenze di potenziale, che si generano tra le due serie di saldature della termopila e che, in definitiva, sono proporzionali all' intensità della radiazione incidente su di essa. Lo strumento può essere adoperato sia per misure di radiazione solare globale (diretta e diffusa) — uso prevalente — , sia (munito di opportuno tubo pireliometrico) per misure di radiazione solare diretta.

Per l' osservazione e lo studio dell' eclisse del 25 febbraio 1952 (1), mi servii, tra l' altro, del solarigrafo Gorczynski N. 327 dell' Istituto di Fisica Terrestre di Napoli. Il millivoltmetro registratore è munito di una scala graduata da 0 a 10. Fu quindi necessario tararlo per confronto con un pireliometro assoluto per ricavare la relazione esistente tra l' intensità della radiazione solare q in cal./cm.^{2} min. e le divisioni N della scala del registratore. Per la detta taratura mi sono servito del pireliometro di Ångström N. 96 dello stesso Istituto [1]).

In 10 giornate, distribuite nelle varie stagioni, sono state eseguite, in differenti ore del giorno, 112 osservazioni di radiazione solare diretta contemporaneamente al solarigrafo ed al pireliometro. All' uopo si è fatto in modo, con un opportuno congegno, che la superficie della pila si potesse in ogni istante disporre normalmente ai raggi solari e, con un opportuno tubo, che sulla detta superficie incidesse la sola radiaziazione solare diretta I punti rappresentativi sono stati riportati nel grafico allegato (vedi fig. 1), prendendo come ascisse le divisioni N lette al registratore e come ordinate l' intensità della radiazione solare diretta q in cal./cm^2. min.. Poichè il registratore dà la misura di una grandezza (differenza di potenziale fra le saldature della termopila) proporzionale a q, tenuto conto che può am-

---

[1]) I detti apparecchi furono messi a mia disposizione dal mio Maestro e Direttore, Prof. Giuseppe Imbò, che sento il dovere di ringraziare, anche per i preziosi consigli e suggerimenti, di cui sempre mi fu largo.

mettersi una proporzionalità fra detta grandezza e divisioni della scala, è chiaro che la curva di taratura dovrebbe essere una retta passante per l'origine. Ma già la semplice ispezione dei punti riportati sul grafico,

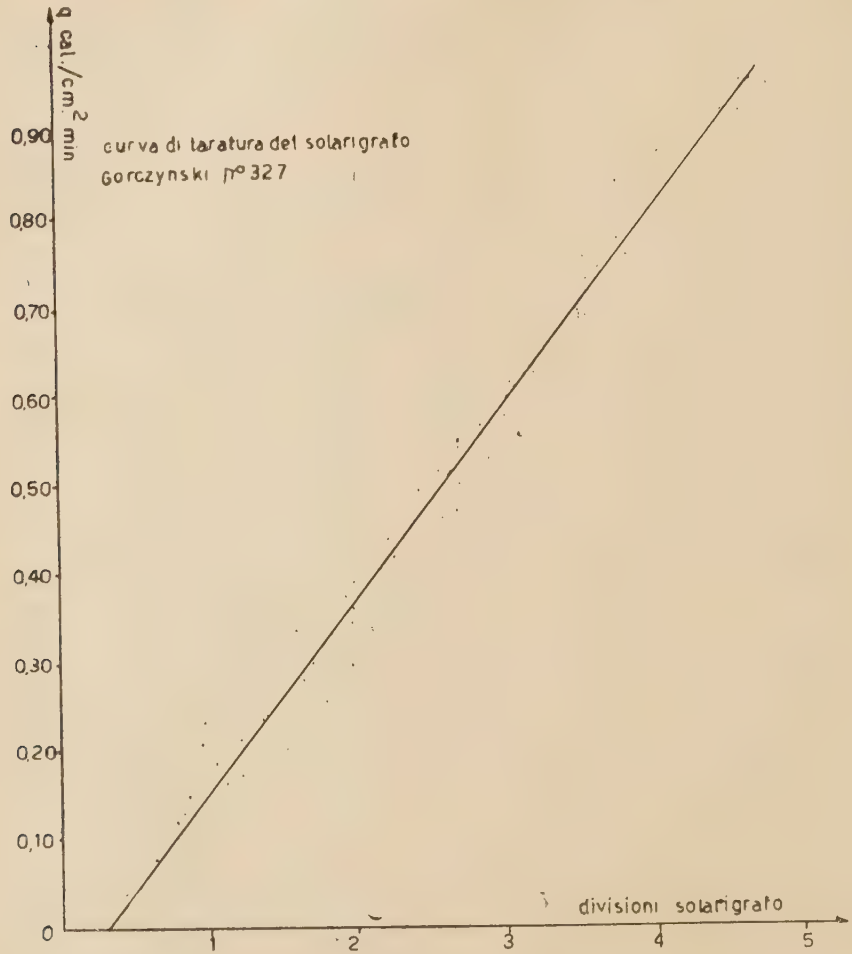


Fig. 1

mentre ci assicura trattarsi appunto di una retta, ci dice che questa non passa per l'origine. La sua equazione sarà pertanto:

$$q = aN + b. \tag{1}$$

Per la determinazione dei valori più probabili delle costanti a e b, ho fatto ricorso al metodo dei minimi quadrati. Alle 112 osservazioni fatte si può attribuire lo stesso peso, assendo state tutte eseguite nelle medesime condizioni (cielo sempre completamente sereno, stessa località di os-

servazione, stesso sperimentatore ecc.). Scritte le 112 equazioni generatrici, si ottiene pertanto il sistema normale :

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\sum_i N_i^2\right) a + \left(\sum_i N_i\right) b - \sum_i N_i q_i = 0 \\ \left(\sum_i N_i\right) a + \quad 112 \quad b = \sum_i q_i \quad = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 112).$$

Si trova così che :

$$(3)\quad \begin{cases} a = \quad 0{,}2168 \\ b = -0{,}0562 \end{cases}$$

Resta così confermato che, essendo $b \neq 0$, la retta non passa per l'origine, e precisamente :

$$(4)\qquad \text{per} \quad q = 0, \quad N_0 = 0{,}26.$$

Viene così messa in luce una caratteristica del solarigrafo Gorczynski, della quale mi occuperò diffusamente in altro lavoro, e cioè : le indicazioni dello strumento risultano tutte aumentate di una quantità costante al variare della divisione considerata sulla scala del registratore, e perciò lo zero da prendersi in considerazione durante le misure è diverso da quello determinato prima di esporre lo strumento alla radiazione solare.

Bisogna ora determinare gli errori. Essi si possono raggruppare in due categorie :

I) Errori accidentali commessi nelle osservazioni di taratura, supponendo esatte la determinazione di q al pireliometro ;

II) Errori dipendenti dal fatto che, anche ritenendo esatta la costante del piroliometro indicata dal costruttore (K = 16,69), la stessa q determinata all' Ångström è, a sua volta, affetta da errori.

Per quanto riguarda gli errori della prima categoria, si determina agevolmente lo scostamento quadratico medio μ, in base alla nota formula :

$$(5)\qquad \mu = \pm \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n - m}},$$

nella quale v è lo scarto di ogni singola misura effettuata, n il numero delle osservazioni, m quello delle incognite. Si ricava nel nostro caso :

$$(6)\qquad \mu = \pm 0{,}03.$$

E che gli errori siano puramente accidentali e che quindi lo scarto

sia una variabile casuale che obbedisce alla legge di Gauss, lo si può verificare dal fatto che:

$$1{,}25\ \chi = 0{,}03 = \mu \tag{7}$$

essendo χ l'errore medio.

La precisione dei risultati, per quanto riguarda il calcolo di a e di b, si desume dal valore degli errori (scostamenti quadratici medi) da cui risultano affette a e b (μ_a e μ_b):

$$\mu_a = \pm\,\mu\sqrt{\frac{n}{n\,\Sigma_i N_i^2 - (\Sigma_i N_i)^2}} = \pm\,0{,}0027$$

$$\mu_b = \pm\,\mu\sqrt{\frac{\Sigma_i N_i^2}{n\,\Sigma_i N_i^2 - (\Sigma_i N_i)^2}} = \pm\,0{,}0088 \tag{8}$$

Gli errori della seconda categoria, poi, dipendono in definitiva dall'errore in i (Δi), che, a sua volta, consta di due termini: errore di lettura al milliamperometro ($\Delta_1 i$) ed errore dovuto al mancato azzeramento del galvanometro ($\Delta_2 i$). $\Delta_1 i$ è pari alla minima frazione d'intervallo apprezzabile sulla scala del milliamperometro, che si può porre uguale a 2/10, ossia a 1/1000 A (1 divisione = 5/1000 A).

Circa infine l'errore commesso per il mancato azzeramento, bisogna considerare che, in definitiva, esso dipende dalla lettura della scala del galvanometro ed è quindi pari alla minima frazione d'intervallo apprezzabile su detta scala, che si può porre uguale a 2/10, ossia a cm. 0,02 (1 divisione = cm. 0,1), che corrispondono ad una rotazione $\Delta\alpha$ dello specchietto di 41″,25 (scala a 50 cm. dallo specchietto). Questa variazione $\Delta\alpha$ è causa di un errore $\Delta_2 i$ nella determinazione della i corrispondente all'azzeramento del galvanometro e, in base a facili considerazioni, [1]) si

---

[1]) L'angolo $\Delta\alpha$ di cui dovrebbe ulteriormente ruotare lo specchietto per azzerare il galvanometro è proporzionale alla differenza di temperatura ancora esistente fra le due laminette, e questa alla differenza Δq tra le quantità di calore sviluppate in esse dalla radiazione solare e dalla corrente compensatrice. Sicchè:

$$\Delta\alpha = \rho \cdot \Delta q \qquad (\rho = \text{cost.}).$$

Ma, supponendo nullo in queste caso il $\Delta_1 i$, si ha:

$$\Delta q = 2\mathrm{K}i \cdot \Delta_2 i$$

e perciò in definitiva si ottiene la relazione riportata (9) e risulta

$$\rho\,\sigma = 1/2\mathrm{K}.$$

perviene alla relazione :

$$\Delta_2 i = \sigma \frac{\Delta\alpha}{i} \qquad (\sigma = \text{cost.}) \tag{9}$$

Essendo fissato $\Delta\alpha$, per rendere quanto più piccolo fosse possibile $\Delta_2 i$, occorreva rendere quanto più piccolo possibile σ che ovviamente dipende dalla sensibilità del galvanometro; e tutti gli accorgimenti furono adoperati per migliorare la detta sensibilità. Ciò fatto determinato sperimentalmente σ [2]) $(= 6{,}437 \times 10^{-9})$, si ricava finalmente per quanto riguarda l'errore nella misura di q al pireliometro :

$$\Delta q = \pm 0{,}033 \sqrt{\frac{q}{K}} \pm 0{,}007. \tag{10}$$

Nel 2° membro il primo addendo si riferisce all'errore di lettura al milliamperometro, il secondo al mancato azzeramento. Quest'ultimo termine si può anche ricavare per altra via, determinando cioè sperimentalmente il Δr, ossia la variazione di resistenza r del circuito di compensazione, che determina lo spostamento di 2/10 di divisione alla scala del galvanometro. Si ha infatti la relazione :

$$\Delta r = \frac{1}{2K} \cdot \frac{r}{i^2} \cdot \Delta q. \tag{11}$$

Da misure eseguite risultò :

$$\begin{aligned} \Delta r &= \pm 0{,}066 \\ \Delta q &= \pm 0{,}008 \text{ cal./cm.}^2 \text{ min.} \end{aligned} \tag{12}$$

in buon accordo con l'altro metodo.

Infine, tenendo conto anche di μ, ossia degli errori accidentali commessi nelle operazioni di taratura, indipendentemente dalla determinazione di q al pireliometro, indicando con q^* il valore più probabile della radiazione corrispondente al valore q osservato al solarigrafo, esso è dato dalla relazione :

$$q^* = q \pm 0{,}033 \sqrt{\frac{q}{K}} \pm 0{,}037. \tag{13}$$

dove q è data dalla (1).

[2]) Dalla (2) si ricava che, fissato un arbitrario $\Delta\alpha$, il prodotto $i \cdot \Delta_2 i$ deve risultare costante. Sperimentalmente è stato determinato il valore di detta costante, donde poi dividendo per $\Delta\alpha$ si è ricavato il valore indicato di σ.

Tenendo conto dei valori massimi che può raggiungere la q, si può dire in definitiva che l'errore che si commette, non supera 0,05 cal./cm.^{2} min..

Ma, com'è noto, il Gorczynski è adoperato prevalentemente come solarigrafo e come tale la sua taratura riesce assai più difficile e delicata.

Si presenta difatti una difficoltà che, a un primo esame, può sembrare insormontabile, derivante da due cause: Innanzi tutto, per quanto la superficie della pila sia uniformemente annerita con una vernice speciale, questa presenta tuttavia delle variazioni, nei diversi punti della superficie stessa, del suo potere assorbente. In secondo luogo i due emisferi di vetro di protezione si comportano in sostanza come due menischi convergenti e poichè non sono di apertura trascurabile, dànno origine ad una caustica di rifrazione, la cui intersezione col piano della superfieie sensibile darà luogo alla registrazione. Ma è chiaro che l'area di tale sezione varia al variare dell'incidenza e per angoli di incidenza prossimi a 90° (Sole all'orizzonte) la suddetta intersezione potrebbe anche non essere tutta contenuta entro la superficie. Evidentemente nulla di preciso si può prevedere circa la variazione del potere assorbente da punto a punto della superficie sensibile, ma è chiaro che quando l'annerimento è fatto con cura e poichè la caustica investe praticamente tutta la superficie sensibile, non si avrà un apprezzabile variazione della costante strumentale con la direzione dei raggi incidenti, per questa causa.

Per quanto riguarda invece la caustica è evidente che la costante strumentale, per cui occorre moltiplicare il numero di divisioni N per ottenere l'intensità della radiazione globale Q_t in cal./cm.^{2} min.) varia con regolarità con l'angolo d'incidenza ossia con l'altezza del Sole sull'orizzonte.

In genere si calcola (per confronto con un pireliometro) un numero discreto di valori della costante corrispondenti a valori particolari dell'angolo d'incidenza. Tutti gli altri si deducono per interpolazione.

Per rendere più rapida ed agevole la deduzione della legge di variazione della costante strumentale K (ζ) al variare della distanza zenitale ζ del Sole, presso l'Istituto di Fisica Terrestre di Napoli è stato ideato e costruito uno speciale dispositivo. Esso in sostanza si basa sul principio di far variare di angoli misurabili l'orientazione della normale alla superficie sensibile rispetto alla direzione dei raggi incidenti, anzichè lasciare il solarigrafo orizzontale ed effettuare varie misure al variare dell'altezza del Sole sull'orizzonte. Il solarigrafo infatti è sostenuto da un sostegno che permette all'asse dell'apparecchio di assumere una qualsiasi orientazione nello spazio per portarlo a coincidere con la direzione del fascio dei raggi incidenti. Agendo poi alla sola vite regolatrice dell'inclinazione, s'inclina il piano del solarigrafo di un angolo variabile e misurabile me-

diante un indice collegato al tubo pireliometrico e scorrevole su un cerchio graduato solidale al solarigrafo.

In tal modo si possono ottenere anche in una sola giornata di osservazioni tutti i dati relativi alle varie altezze del Sole sull'orizzonte nel-

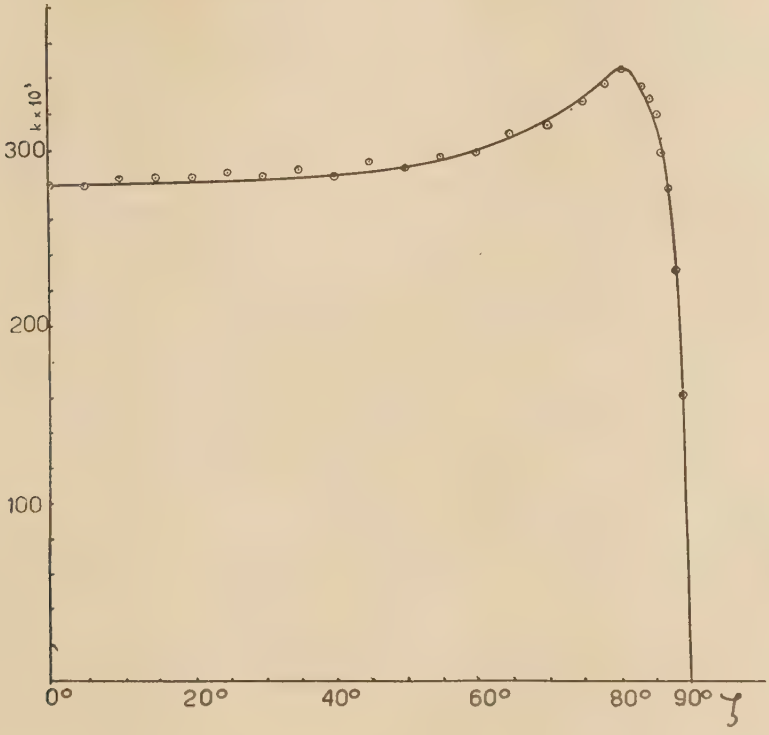


Fig. 2

l'anno, ed anche ad altezze mai raggiunte dal Sole nella località di osservazione, utili anche questi per il calcolo dell'opportumo coefficiente per radiazioni diffuse corrispondenti ad altezze prossime a 90°.

Con tale metodo si è ottenuta la Tabella I e il grafico riportato in fig. 2.

TABELLA I

Valori della costante strumentale K (ξ) al variare della distanza zenitale ζ del Sole.

ζ	K (ζ)	ζ	K (ξ)
0°	0,280	60°	0,298
5°	0,280	65°	0,307
10°	0,281	70°	0,316
15°	0,282	75°	0,329
20°	0,283	80°	0,346
25°	0,284	85°	0,320
30°	0,284	86°	0,306
35°	0,285	87°	0,286
40°	0,286	88°	0,240
45°	0,287	89°	0,168
50°	0,290	90°	0,000
55°	0,294		

Ciò posto, se l'apparecchio fosse destinato solo a registrare la radiazione solare diretta ridotta all'orizzonte, ogni difficoltà sarebbe vinta, bastando a tal fine calcolare il valore dell'altezza h del Sole sull'orizzonte nello stesso istante della misura servendosi della nota formula:

$$\text{sen}h = \text{sen}\,\varphi \cdot \text{sen}\,\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t, \qquad (14)$$

dove φ è la latitudine del luogo di osservazione, δ la declinazione e t l'angolo orario del Sole (ora vera), e deducendo dal grafico il corrispondente valore del K (ζ).

Ma come si è accennato sin dall'inizio il solarigrafo di Gorczynski serve principalmente per misure di radiazione globale e riceve in tal caso, oltre la radiazione solare diretta, per la quale vale quanto abbiamo finora detto, anche quella proveniente dalle diverse parti del cielo. Pertanto per poter calcolare l'intensità della radiazione solare globale, poichè da un lato la radiazione solare diretta ha in ogni istante una direzione ben determinata, mentre quella diffusa proviene da tutte le direzioni, bisognerebbe conoscere la frazione di ordinata solarigrafica dovuta alla radiazione diretta, cui si dovrebbe applicare il coefficiente strumentale che si riferisce all'altezza del Sole nell'istante considerato e la frazione corrispondente alla radiazione diffusa. Per quanto poi si riferisce a quest'ultima, bisognerebbe ancora conoscere per essa il contributo delle diverse zone della calotta celeste perchè rigorosamente ad ognuna delle zone elementari compete un diverso coefficiente.

Ora in casi particolari, come fu fatto a proposito dell'eclisse solare

del 1952, è possibile scindere la radiazione diretta dalla diffusa facendo ad esempio funzionare il solarigrafo contemporaneamente ad un pireliografo. Ma un tale procedimento è laborioso e non può essere applicato al caso di misure sistematiche quali sono appunto quelle di radiazione solare. Indipendentemente da ciò, ossia, anche ammettendo di aver separato l'ordinata relativa alla radiazione diretta da quella relativa alla radiazione diffusa, resterebbe sempre la difficoltà di determinare il coefficiente relativo a quest'ultima, giacchè esso ovviamente varia con l'entità, o meglio con la frazione di essa corrispondente alle varie parti del cielo. E dipenderà pertanto anche dalla distribuzione delle nubi.

Le difficoltà possono essere superate facendo delle ipotesi semplificative seguendo il metodo del Puppo ed impiegando assieme al solarigrafo un comune eliofanografo.

Come lo stesso Puppo avverte è bene mettere in evidenza a giustificazione del metodo che un errore del 2 % derivante dalla incerta valutazione del coefficiente, è trascurabile dovendosi ritenere inferiore o al massimo uguale all'approssimazione strumentale.

Precisamente, posto:

$$Q_t = H\, N_t \tag{15}$$

in cui Q_t è l'intensità della radiazione solare globale in cal./cm.^{2} min., N_t è il numero di divisioni letto al millivoltmetro registratore Richard ed H la costante strumentale, in base al metodo semplificato del Puppo, risulta:

$$H = \frac{\eta\, \chi_n + (1 - \eta)\, f\, K(\zeta)}{\eta + (1 - \eta)\, f} \tag{16}$$

Nella (16):

a) η è il rapporto fra la radiazione diffusa e la radiazione globale;

b) χ_n (l'indice n sta a denotare la nebulosità in decimi all'istante della misura) è un coefficiente dedotto tenendo conto del contributo alla radiazione diffusa da parte delle varie zone della calotta celeste, dei valori di $K(\zeta)$ relativi a ciascuna zona e della nebulosità.

Più precisamente, nel caso di cielo completamente coperto, considerando la calotta celeste uniformemente diffondente e calcolando i contributi per zone di 10° di apertura

$$\begin{aligned}\chi_{10} = {} & 0{,}030\,[K(5^\circ) + K(85^\circ)] + 0{,}087\,[K(15^\circ) + K(75^\circ)] + \\ & + 0{,}133\,[K(25^\circ) + K(65^\circ)] + 0{,}163\,[K(35^\circ) + K(65^\circ)] + \\ & + 0{,}174\,[K(45^\circ)].\end{aligned} \tag{17}$$

Nel caso invece di cielo completamente sereno, tenendo presenti i risultati di misure sperimentali circa i contributi delle varie zone del cielo e considerando zone di 30° di apertura:

$$(18) \qquad \chi_0 = 0{,}38\ K\ (75^0) + 0{,}44\ K\ (45^0) + 0{,}18\ K\ (15^0)$$

Per nebulosità intermedie si ritiene che χ_n vari linearmente con n.

c) Circa la f — frazione di insolazione — si deve precisare che il Puppo in generale fa corrispondere ad ogni frazione di ora letta direttamente all'eliofanografo un'altra frazione, quella (dedotta a stima in base ad una scala convenzionale) durante la quale il Sole avrebbe trasmesso la stessa quantità di energia se fosse stato però completamente scoperto.

Per il solarigrafo da noi adoperato si sono ottenuti i seguenti valori della χ_n

TABELLA II

$\chi_{10} = 0{,}2940$	$\chi_4 = 0{,}2988$
$\chi_9 = 0{,}2948$	$\chi_3 = 0{,}2996$
$\chi_8 = 0{,}2956$	$\chi_2 = 0{,}3004$
$\chi_7 = 0{,}2964$	$\chi_1 = 0{,}3012$
$\chi_6 = 0{,}2972$	$\chi_0 = 0{,}3020$
$\chi_5 = 0{,}2980$	

Una ulteriore semplificazione si realizza tenendo conto che γ_i varia fra 0,10 e 0,30 ed applicando ad essa il valore medio 0,20, il che, ove si tenga conto delle limitazioni fatte e del grado di incertezza nella valutazione dei χ_n, non può indurre che in errori molto piccoli nella valutazione del coefficiente H. In tal caso:

$$(19) \qquad H = \frac{\chi_n + 4f\,K(\zeta)}{1 + 4f}$$

Si vede così che aver determinato l'andamento di $K(\zeta)$ in funzione di ζ è sufficiente per convertire in cal./cm.^{2} min. l'ordinata letta al millivoltmetro.

Non è possibile qui, come nel caso precedente, procedere ad un rigoroso calcolo dell'errore, poichè esso dipende, tra l'altro, dalle particolari condizioni del cielo all'istante cui si riferisce la misura (ad esempio distribuzione delle nubi), ma si può ritenere che quando, come si procede nella pratica, le osservazioni si effettuano per lunghi intervalli di tempo, dopo dei quali si procede a medie opportune, gli errori diventano sufficientemente piccoli.

Si può pertanto concludere che:

I°) La relazione intercedente tra la intensità della radiazione solare diretta q in cal./cm.^{2} min. e le divisioni N del registratore del solarigrafo Gorczynski N. 327 (adoperato come pireliometro) è data da:

$$q = 0{,}217N - 0{,}06\,;$$

II°) Che la q così determinata è affetta da due errori: l'uno proporzionale alla radice quadrata di q, dipendente dall'errore di lettura al milliamperometro, l'altro costante e dipendente sia dall'errore commesso nell'azzeramento del galvanometro, sia dagli errori accidentali commessi nelle operazioni di taratura.

III°) La costante strumentale per la conversione del numero di divisioni letto al registratore in cal./cm.^{2} min. nel caso di radiazione globale è di difficile determinazione, data la sua variazione con la direzione del fascio di raggi incidenti. Una volta però determinata sperimentalmente la legge di variazione di K (ζ) con ζ, per il particolare solarigrafo adoperato, in base al metodo semplificato del Puppo, la costante strumentale può porsi sotto la forma:

$$H = \frac{\chi_n + 4fK(\zeta)}{1 + 4f}$$

dove χ_n dipende da K (ζ), e dai contributi alla radiazione diffusa da parte delle varie zone della calotta celeste in relazione alla nebulosità ed f dipende dalla frazione di insolazione nell'ora.

Napoli, Istituto di Física Terrestre, 3 luglio 1954.

BIBLIOGRAFIA

(1) – P. Vittozzi, *Radiazione solare diretta, globale e diffusa a Napoli, in occasione dell'eclisse solare del 25 febbraio 1952.* — Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., s. 4ª, vol. XX, Napoli, 1953.

Sul calcolo delle strutture monodimensionali in regime elastoplastico

Nota del dott. ing. **Tullio Renzulli,** *presentata dal socio* **A. Galli**

(Adunanza del dì 6 novembre 1954)

Sunto. Si generalizza l'equazione dei quattro momenti per i telai in regime elastoplastico, mostrando come, ove si trascurino le deformazioni elastiche, si ricade nel metodo della rottura localizzata.

Le equazioni generali, non lineari, sono suscettibili di una soluzione per successive approssimazioni rapidamente convergente nel caso di forze concentrate.

1. *Premessa.*

L'indagine sul comportamento delle strutture al di là del campo delle deformazioni elastiche, necessario quando si voglia dare al coefficiente di sicurezza un significato più rispondente alla intuizione fisica di quello finora usualmente accettato, è problema arduo poichè nella soluzione di esso si va incontro o a pressocchè insormontabili difficoltà analitiche, se lo si imposta secondo i classici schemi delle equazioni di congruenza o di altri procedimenti equivalenti, o a critiche quando si seguono procedimenti, che, prescindendo dallo studio graduale del fenomeno, prendono in esame lo stadio che immediatamente precede la rottura.

In un lavoro in corso di stampa [2], partendo dal concetto di momento di innesco, cioè di quel valore del momento per il quale le fibre più lontane dall'asse neutro raggiungono l'allungamento di rottura, si imposta un calcolo che, sia pure operando materialmente in maniera simile a quella del « limit design » [3] [4] [5] [6] [7], si distacca nettamente da esso poichè impone un limite alle deformazioni: sotto questo aspetto il metodo della rottura localizzata può dirsi intermedio tra il calcolo a rottura e quello per congruenza.

In questa nota ci si propone di impostare un calcolo rigoroso delle strutture monodimensionali in regime elastoplastico che conduce alla risoluzione di un sistema di equazioni non lineari, e di mostrare come, trascurando le deformazioni elastiche rispetto a quelle plastiche, le equazioni si riducono a quelle che si scriverebbero operando in conformità del metodo della rottura localizzata. Quest'ultimo può pertanto dirsi rigoroso sempre che a rottura le deformazioni plastiche siano molto maggiori di quelle elastiche.

2. *La curvatura plastica.*

Si consideri il diagramma momento-curvatura della fig. 1, ricavato da quello tensione-deformazione della fig. 2, nell'ipotesi della conservazione delle sezioni piane.

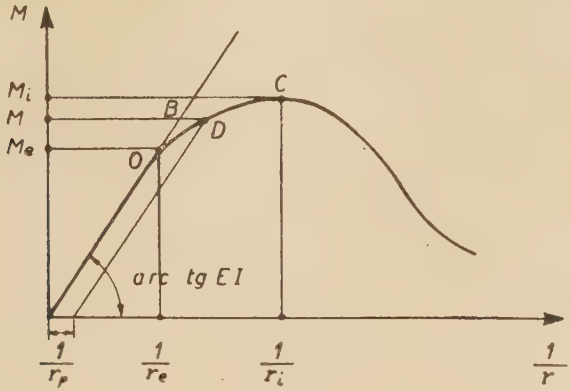


Fig. 1.

Per un valore del momento M compreso tra M_e ed M_i la curvatura $\frac{1}{r} = MD$ (vedi fig. 1) può considerarsi somma di $MB = \frac{1}{r'_e}$ proporzionale al momento secondo la legge valida in campo elastico, e di $BD = \frac{1}{r_p}$ di carattere anelastico detta « curvatura plastica »

$$(1) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r'_e} + \frac{1}{r_p}.$$

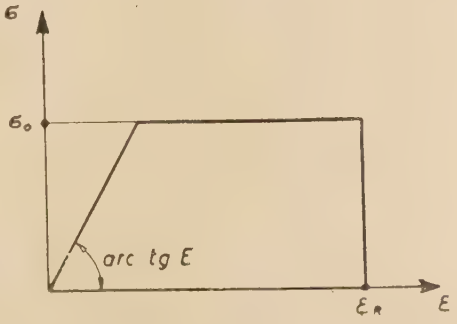


Fig. 2.

Lo studio di un elemento di trave in regime elastoplastico può condursi analogamente a quello in regime elastico, pur di considerare per i tratti soggetti ad un momento $M > M_e$ una seconda curvatura $\frac{1}{r_p}$ che si somma a quella elastica $\frac{1}{r'_e}$.

Tra gli estremi di questi tratti si verifica, oltre alla rotazione elastica, una seconda rotazione di carattere anelastico

$$(2) \qquad \varphi_p = \int_{\Delta S} \frac{1}{r_p}\, dS.$$

Il calcolo della rotazione φ_p può eseguirsi, una volta noto il diagramma del momento, attraverso la conoscenza del diagramma momento-curvatura della fig. 1.

Qualora possa assimilarsi il tratto OC ad un segmento di retta, approssimazione accettata da diversi autori [1] [2], si ha

$$\text{(3)} \qquad \text{BD} = \frac{1}{r_p} = \text{K}\,(\text{M} - \text{M}_e)$$

dove K è una costante di proporzionalità il cui valore si ricava scrivendo la (3) per $\text{M} = \text{M}_i$

$$\frac{1}{r_i} = \frac{2\varepsilon_R}{h} = \text{K}\,(\text{M} - \text{M}_i)$$

da cui

$$\text{K} = \frac{2\varepsilon_R}{h\Delta\text{M}_i}$$

avendo posto

$$\text{(4)} \qquad \Delta\text{M}_i = \text{M} - \text{M}_i$$

e rappresentando h l'altezza della sezione.

Il valore del momento massimo M_i sviluppabile delle forze elementari interne, detto momento di innesco poichè caratterizza il punto del diagramma momento curvatura a partire dal quale il momento decresce allo aumentare della curvatura, dipende da σ_0, dal rapporto $\varepsilon_0/\varepsilon_R$ e dalla forma e dimensione della sezione. Per la sezione rettangolare $b \times h$ si ha:

$$\text{M}_i = \frac{1}{4}\, b\, \sigma_0\, h^2 \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_R}\right)^2\right].$$

La (2), con la posizione (3), indicando con ΔM la differenza tra i valori del momento agli estremi del tratto ΔS considerato, fornisce rispettivamente nel caso di tratto scarico e di tratto con carico uniforme p

$$\text{(2')} \qquad \varphi_p = \text{K}\,\frac{\Delta\text{M}^2}{2i} \qquad \text{(i, pendenza del diagramma del momento rispetto all'asse della trave)}$$

$$\text{(2'')} \qquad \varphi_p = \text{K}\,\frac{\Delta\text{S}}{2}\left(\Delta\text{M} - p\,\frac{\Delta\text{S}^2}{6}\right).$$

3. *L'equazione dei quattro momenti generalizzata.*

I concetti esposti al paragrafo precedente permettono di estendere la equazione dei quattro momenti alle strutture in regime elastoplastico.

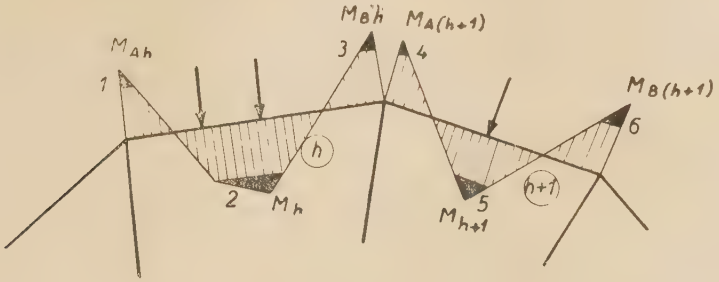


Fig. 3.

Siano h ed $h+1$ due elementi di un telaio piano concorrenti in un nodo, caricati da un sistema generico di forze e coazioni concentrate e distribuite; in generale si hanno dei tronchi per i quali risulta $M > M_e$, detti tronchi sono segnati nella fig. 3 [1]).

La uguaglianza delle rotazioni dell'estremo B dell'elemento h e dello estremo A dell'elemento $h+1$ permette di scrivere la relazione:

$$\varphi_B^h + \varphi_A^{h+1} = \varphi_{Bh} + \varphi_{B(h+1)} + \sum_i^{3,4} \int_{\Delta Si} \frac{1}{r_p}\, dS + \tag{5}$$

$$- \sum_i^{2,5} \int_{\Delta Si} \frac{l_i - \xi_i}{l_i} \frac{1}{r_p}\, dS$$

avendo posto:

φ_B^h e φ_A^{h+1} = rotazioni dovute ai carichi alle coazioni esterne ed ai cedimenti, di trave semplicemente appoggiata;

φ_{Bh} e $\varphi_{B(h+1)}$ = rotazioni, di trave semplicemente appoggiata, dovute ai momenti sugli appoggi.

ξ_i – rapporto tra la distanza del baricentro del tratto i dal nodo in esame e la luce della campata.

---

[1]) In generale i tratti nella campata possono essere più di uno; quanto segue è valido nel caso generale con ovvie ed immediate correzioni alle formule scritte.

Essendo la curvatura $1/r_p$ funzione del momento flettente e quindi, per assegnati carichi, funzione dei momenti nelle sezioni di incastro, la (5) è una equazione in generale non lineare e non omogenea nelle 4 incognite

$$M_{A\hbar},\ M_{B\hbar},\ M_{A(\hbar+1)},\ M_{B(\hbar+1)}.$$

La risoluzione di un sistema di equazioni del tipo della (5) si presenta in generale difficile: è consigliabile procedere per successive approssimazioni, assegnando un diagramma del momento e calcolando le rotazioni anelastiche. Il sistema è così linearizzato: calcolati i nuovi valori del momento si paragonano con quelli di partenza ed eventualmente si procede ad una seconda approssimazione.

E' da notare che per qualche trave qualcuno, o tutti i tratti plasticizzati ΔS possono mancare.

Nel caso di forze concentrate e di elementi a sezione costante, tenendo presente la (2') la (5) si scrive:

$$\varphi_B^{\hbar} + \varphi_A^{\hbar+1} = \frac{l_{\hbar}}{6\,EI_{\hbar}}(2M_{B\hbar} + M_{A\hbar}) + \frac{l_{\hbar+1}}{EI_{\hbar+1}}(2M_{A\hbar+1)} + M_{B\,\hbar+1)}) +$$

$$(6) \qquad + \frac{\Delta M^2_{B\hbar}}{2i_{B\hbar}} + \frac{\Delta M^2_{A\hbar+1)}}{2i_{A(\hbar+1)}} +$$

$$- \frac{\Delta M^2_{\hbar}}{2}\left(\frac{1}{i'_{\hbar}} + \frac{1}{i''_{\hbar}}\right)\frac{l_{\hbar} - \xi_2}{l_{\hbar}} - \frac{\Delta M^2_{\hbar+1}}{2}\left(\frac{1}{i'_{\hbar+1}} + \frac{1}{i''_{\hbar+1}}\right)\frac{l_{\hbar+1} + \xi_5}{l_{\hbar+1}}.$$

Il sistema di equazioni del tipo (6) dà luogo ad un procedimento di successive approssimazioni di rapida convergenza: assegnato un ragionevole diagramma del momento flettente, si calcolano le relative inclinazioni da sostituire nella (6). Queste ultime forniscono i momenti sugli appoggi da confrontare con quelli di partenza.

Poichè le inclinazioni variano poco in confronto delle variazioni dei momenti sugli appoggi con poche iterazioni si persegue il risultato tecnicamente esatto.

4. *Il metodo della rottura localizzata.*

Si prende in esame l'equazione (5); facendo l'ipotesi che i termini dovuti alle rotazioni plastiche siano tanto grandi da poter trascurare al confronto quelli elastici, essa ci scrive:

$$(7) \qquad \sum_i^{3,4} \int_{\Delta S i} \frac{1}{r_p}\, dS = \sum_i^{2,5} \int_{\Delta S i} \frac{l_i - \xi_i}{l_i}\, \frac{1}{r_p}\, dS\ .$$

In corrispondenza di un elemento terminale del telaio mancano i termini relativi ad una delle due campate adiacenti (un incastro può infatti considerarsi come due appoggi vicinissimi); la (7) si riduce a

$$(8) \qquad \sum_{i}^{1,3} \int_{\Delta Si} \frac{1}{r_p} \, dS = \int_{\Delta S_2} \frac{1}{r_p} \, dS \, .$$

La (8) si legge dicendo che la rotazione plastica lungo una campata terminale è uguale alla somma di quelle agli estremi; tenendo conto delle (7) e (8) questa proprietà si estende a tutti gli elementi del telaio. L'equazione dei quattro momenti con le notazioni della fig. 4 si riduce pertanto alla semplice espressione:

$$\theta_1 = \theta_2 + \theta_3 ;$$

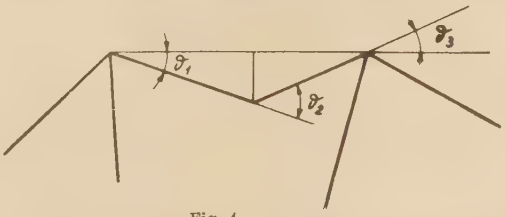


Fig. 4.

gli elementi del telaio rimangono a tratti rettilinei, come era da prevedersi per l'ipotesi fatta. Si ricade così nel metodo della rottura localizzata che prende appunto in conto i rapporti tra gli angoli di rotazione rigida a rottura.

E' interessante infine rilevare che, in presenza di coazioni esterne (p. es. variazioni termiche) e trascurando le rotazioni elastiche, si possono tenere in conto dette coazioni, pur facendo un calcolo a rottura.

Università di Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Ottobre 1954.

BIBLIOGRAFIA

1. Levi F. *Analisi dei fenomeni anelastici perseguita fino a rottura.* Giornale del Genio Civile, Roma, 1954, n. 3.
2. Galli A. Renzulli T. *Contributo alla evoluzione del metodo delle cerniere plastiche. Metodo della rottura localizzata.* Giornale del Genio Civile, Roma, 1954.
3. Galli A. *Scienza delle Costruzioni,* Vol. 2°, Pellerano-Del Gaudio, Napoli.
4. Franciosi V. *Sul calcolo a rottura delle strutture monodimensionali in regime elasto-plastico.* Giornale del Genio Civile, Luglio-Agosto 1952.
5. Greenberg-Prager. *Limit design of beams and frames.* Proceedings of the American Society of Civil Engineering, 1951, n. 59, Vol. 77.
6. Galli A. e Franciosi V. *Introduzione della caratteristica tagliante nel calcolo a rottura.* L'" Ingegnere „, 1953, n. 8
7. Franciosi V. *Discussion of limit design of beams and frames.* Proceedings of the American Society of Civil Engineering, 1952, n. 59, Vol. 78.

Una generalizzazione di un teorema di Da Silva

Nota del dott. **Francesco Stoppelli** *presentata dal socio* **Carlo Tolotti**

(Adunanza del dì 5 giugno 1954)

Sunto. — Viene trattato il seguente problema: su un solido agisce una sollecitazione a risultante nullo, determinare un rotore tale che, applicato ai vettori della sollecitazione, trasformi questa in un'altra di momento assegnato.

1. Sia C_* un solido, Σ_* la superficie contorno, P_* il generico punto di C_* e Q_* quello di Σ_*, k_* la densità in P_* del solido. Supporremo che su questo agisca la sollecitazione ripartita S a risultante nullo, definita dall'essere rispettivamente

$$(1) \qquad [P_*,\ k_* \mathbf{F}(P_*)\, dC_*] \quad , \quad [Q_*,\ \mathbf{f}^*(Q_*)\, d\Sigma_*]$$

le forze agenti sui generici elementi dC_*, $d\Sigma_*$ di C e Σ_*.

Indicheremo poi con $S(\gamma)$ la sollecitazione ripartita (anch'essa a risultante nullo) che si ottiene da S applicando a ciascun suo vettore il rotore $\gamma = \| \gamma_{rs} \|$, cioè la sollecitazione ripartita definita dall'essere rispettivamente

$$(2) \qquad [P_*,\ k_* \gamma \mathbf{F}(P_*)\, dC_*] \ , \quad [Q_*,\ \gamma\, \mathbf{f}^*(Q_*)\, d\Sigma_*]$$

le forze agenti su dC_* e $d\Sigma_*$.

Nel seguito diremo brevemente che $S(\gamma)$ è la *configurazione* di S corrispondente al rotore γ.

In una ricerca sulla esistenza di soluzioni delle equazioni dell'elastostatica isoterma per deformazioni finite, che sarà oggetto di una mia prossima Memoria, mi si è presentato il seguente problema:

Assegnato un vettore **L**, *stabilire in quali ipotesi esistono rotori* γ *tali che il momento* $\mathbf{M}(\gamma)$ *di* $\mathbf{S}(\gamma)$ *risulti uguale ad* **L**.

Nel caso particolare che sia $\mathbf{L} = 0$ non occorre fare alcuna ipotesi affinchè esistano siffatti rotori: è noto che [teorema [1]) di Da Silva] nella totalità delle configurazioni $S(\gamma)$ ve ne sono almeno quattro equilibrate. Ne-

---

[1]) D. A. Da Silva: *Memoria sobre a rotaçao das forças em torno dos pontos d'applicaçao.* (Mem. Ac. R. das Sciencias de Lisboa, s. II., t 3, parte I; 1851; 61-231). Cfr. anche A. Signorini: *Sollecitazioni iperastatiche* (*Rendiconti* del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, Vol. LXV, fasc. XIX-XX).

caso invece che sia $\mathbf{L} \neq 0$ il problema non ammette sempre soluzioni: ad es. se la sollecitazione S è astatica, il momento $\mathbf{M}(\gamma)$ non può mai assumere determinazioni $\mathbf{L} \neq 0$.

Nella presente Nota mi occupo appunto dell'anzidetto problema nel caso $\mathbf{L} \neq 0$, dimostrando innanzi tutto (n. 4) che:

I) *Nelle configurazioni* $S(\gamma)$ *prossime ad una di equilibrio, ma priva di assi di equilibrio, il momento* $\mathbf{M}(\gamma)$ *assume ogni determinazione* $\mathbf{L}$ *sufficientemente piccola.*

Un simile risultato non vale però se la configurazione di equilibrio è dotata di assi di equilibrio; si ha infatti (nn. 5, 6, 7) che:

II) *Nelle configurazioni* $S(\gamma)$ *prossime ad una dotata di un asse (di una giacitura di assi) di equilibrio, il momento* $\mathbf{M}(\gamma)$ *non può essere, in generale, parallelo all'asse (alla giacitura di assi) di equilibrio.*

III) *Nelle configurazioni prossime ad una dotata di un asse (di una giacitura di assi) di equilibrio, il componente di* $\mathbf{M}(\gamma)$ *secondo la normale all'asse (alla giacitura di assi) d'equilibrio, assume ogni determinazione* $\mathbf{L}'$ $(\mathbf{L}'')$ *sufficientemente piccola.*

Ad illustrare i risultati II) e III) valga il caso che la sollecitazione S si riduca ad una coppia: il momento $\mathbf{M}(\gamma)$ di $S(\gamma)$ risulta allora sempre perpendicolare alla retta (asse di equilibrio) congiungente i punti di applicazione dei vettori costituenti la coppia, mentre il componente di detto momento secondo la normale all'asse di equilibrio (cioè il momento stesso) assume, al variare di γ, ogni determinazione $\mathbf{L}'$ sufficientemente piccola.

Ritornando al problema enunciato a principio, il risultato I) ci permette di affermare che, *se* $\mathbf{L}$ *è sufficientemente piccolo, esso ammette almeno tante soluzioni quante sono le configurazioni di equilibrio prive di assi di equilibrio, mentre il risultato II) ci permette di dire che, in generale, non ve ne sono di più.*

Al n. 7 ho considerato il caso che sul solido C_* agisca, invece di S, la sollecitazione ottenuta da S moltiplicando ciascun vettore di questa per un parametro reale θ. Applicando i risultati del n. 4 a questo caso, pervengo ad un teorema, enunciato alla fine della Nota, che mi sarà particolarmente utile nella ricerca, menzionata a principio, sulle equazioni dell'elastostatica isoterma per deformazioni finite.

2. Sia $\mathfrak{S}_9$ uno spazio a nove dimensioni, Γ il punto di esso avente coordinate $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots \gamma_{33}$, cioè il punto immagine del rotore $\gamma = \| \gamma_{rs} \|$, $\bar{\gamma}$ un rotore tale che $S(\bar{\gamma})$ risulti equilibrato e $\bar{\Gamma}$ il punto immagine di $\bar{\gamma}$.

E' noto [1]) che, per un generico sistema di forze, avente — come nel

[1]) Cfr. M. Bottasso: *Astatique*, Pavia, Mattei 1915, cap. 4°. Cfr. anche F. Stoppelli: *Una rappresentazione geometrica dei rotori e sue applicazioni all'Astatica* (*Ricerche di Matematica*, vol. III, pagg. 95-107).

nostro caso risultante nullo, i rotori $\overline{\gamma}$ sono o quattro, o una semplice infinità, o una doppia infinità, oppure coincidono con la totalità dei rotori. Più precisamente, se $\overline{\gamma}_0$ è un dato $\overline{\gamma}$, possono presentarsi i seguenti casi:

a) nell'insieme dei punti $\overline{\Gamma}$ il punto $\overline{\Gamma}_0$, immagine di $\overline{\gamma}_0$, è isolato;

b) esiste una direzione s [che si dice *asse di equilibrio* del sistema $S(\overline{\gamma}_0)$] tale che tutti i rotori di asse s trasformano $S(\overline{\gamma}_0)$ in un sistema ancora equilibrato;

c) il sistema $S(\overline{\gamma})$ ammette una *giacitura di assi di equilibrio;*

d) tutti i sistemi $S(\gamma)$ sono equilibrati (caso *astatico*).

Detta $\nu_{(\gamma)}$ l'omografia che fa corrispondere al vettore costante ω il vettore

$$\nu_{(\gamma)}\,\omega = \int (\omega \wedge \mathrm{OP}_*) \wedge k_*\,\gamma\,\mathbf{F}\,d\mathrm{C}_* + \int_{\Sigma_*} (\omega \wedge \mathrm{OQ}_*) \wedge \gamma\,\mathfrak{f}^*\,d\Sigma_*\,,$$

la *condizione* [1]) *necessaria e sufficiente affinchè si verifichi il caso a), b), c), d) è che la matrice dei coefficienti dell'omografia* $\nu_{(\overline{\gamma})}$ *abbia caratteristica tre, due, uno, zero rispettivamente.*

3. Dopo quanto abbiamo detto possiamo ora supporre che il sistema assegnato S sia in equilibrio. Posto

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{per } r \neq s \\ 1 & \text{per } r = s \end{cases}$$

$$\overline{\gamma}_0 = \| \delta_{rs} \|\,,$$

indichiamo con $\nu = \| \nu_{rs} \|$ l'omografia $\nu_{(\overline{\gamma}_0)}$, cioè l'omografia che fa corrispondere al vettore costanto ω il vettore

$$\nu\,\omega = \int_{\mathrm{C}_*} (\omega \wedge \mathrm{OP}_*) \wedge k_*\,\mathbf{F}\,d\mathrm{C}_* + \int_{\Sigma_*} (\omega \wedge \mathrm{OQ}_*) \wedge \mathfrak{f}^*\,d\Sigma_*.$$

Introduciamo una terna trirettangola $\mathfrak{T}$ $(y_1\ y_2\ y_3)$ con l'origine in O e diciamo $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3$ le componenti, in $\mathfrak{T}$, di $\mathbf{F}$ ed f_1^*, f_2^*, f_3^* quelle di $\mathfrak{f}^*$; posto

$$\mathrm{A}_{rs} = \int_{\mathrm{C}_*} y_r\,k_*\,\mathrm{F}_s\,d\mathrm{C}_* + \int_{\Sigma_*} y_r\,f_s^*\,d\Sigma_*\,, \tag{3}$$

[1]) Cfr. loc. cit. in [2]).

si ha

$$(4)\qquad \begin{aligned} \nu_{rs} &= A_{rs} \qquad\qquad \text{per} \quad r \neq s \\ \nu_{rr} &= A_{r+1,r+1} + A_{r+2,r+2} \end{aligned}$$

dove, come di uso, $A_{s+p,s+q} = A_{pq}$.

Si osservi ora che, essendo S equilibrato, l'omografia ν risulta essere una dilatazione e perciò, scegliendo la terna di riferimento $\mathfrak{T}$ coincidente con una terna principale di ν, riesce $A_{rs} = 0$ per $r \neq s$.

4. Sia $\mathbf{L}\,(L_1, L_2, L_3)$ un vettore assegnato, ci proponiamo di determinare in quali condizioni esistono configurazioni in cui il momento della sollecitazione S risulti uguale ad L. Si tratta in altri termini di stabilire in quali ipotesi esistono rotori γ tali che $S(\gamma)$ abbia momento $M(\gamma)$ uguale al vettore assegnato, cioè di studiare la risolubilità, rispetto alle γ_{rs}, del sistema:

$$(5)\qquad \begin{cases} \gamma_{32} A_{22} - \gamma_{23} A_{33} = L_1 \\ \gamma_{13} A_{33} - \gamma_{31} A_{11} = L_2 \\ \gamma_{21} A_{11} - \gamma_{12} A_{22} = L_3 \end{cases}$$

con le γ_{rs} tali che

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum_1^3{}_s \gamma_{rs}^2 - 1 = 0 \\ \sum_1^3{}_s \gamma_{rs}\,\gamma_{r+1,s} = 0 \end{cases} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} = 1\,.$$

E' ovvio che un tale rotore non può esistere qualunque siano L ed S: per esempio, se S è astatico, le (5), (6), (7) ammettono soluzione solo se $L = 0$ e, se S è costituito da una coppia, dette equazioni ammettono soluzioni solo se L è ortogonale alla retta congiungente i punti di applicazione dei vettori della coppia. Ma, anche volendo prescindere da sistemi di struttura particolare, il vettore L non si può assegnare di grandezza qualunque per il semplice fatto che, al variare di γ, il momento di $S(\gamma)$ si

mantiene limitato. Noi mostreremo che, *se* **L** *è sufficientemente piccolo, le configurazioni nelle quali il momento* **M** (γ) *è uguale ad* **L** *sono almeno tante quante sono le configurazioni di equilibrio prive di assi di equilibrio.*

A tal uopo consideriamo il sistema costituito dalle (5) e dalle

$$(8)\qquad \begin{cases} \sum_{1}^{3}{}_{s} \gamma_{rs}^2 - 1 = L_{3+r} \\ \sum_{1}^{3}{}_{s} \gamma_{rs}\,\gamma_{r+1,s} = L_{6+r} \end{cases} \qquad \begin{matrix} r = 1,\ 2,\ 3 \\ \gamma_{3\,+\,s} = \gamma_{r\,s} \end{matrix}$$

Esso determina una corrispondenza fra lo spazio $\mathcal{S}_9$ e lo spazio $\mathcal{S}'_9(L_1, L_2, \ldots L_9)$ nella quale ai punti $\overline{\Gamma}$ di $\mathcal{S}_9$ corrisponde l'origine O' di $\mathcal{S}'_9$. Lo Jacobiano J (Γ) delle L_m rispetto alle γ_{rs} è:

$$J(\Gamma) = 8 \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_{33} & 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & 0 & -A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -A_{22} & 0 & A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \begin{vmatrix} -(\gamma_{22}A_{22} + \gamma_{33}A_{33}) & \gamma_{12}A_{22} & \gamma_{13}A_{33} \\ \gamma_{21}A_{11} & -(\gamma_{33}A_{33} + \gamma_{11}A_{11}) & \gamma_{23}A_{33} \\ \gamma_{31}A_{11} & \gamma_{32}A_{22} & -(\gamma_{11}A_{11} + \gamma_{22}A_{22}) \end{vmatrix} = 8\, I_3\, \nu_{(\gamma)}.$$

Essendo

$$(9)\qquad J(\overline{\Gamma}) = 8\, I_3\, \nu_{(\overline{\gamma})},$$

segue da quanto si è detto al n. 2, che J (Γ) è nullo o no a secondo che S $(\overline{\gamma})$ ha o no un asse di equilibrio.

Supponiamo che il sistema S non ammetta alcun asse di equilibrio: sarà

$$J(\overline{\Gamma}_0) = 8\, I_3\, \nu \neq 0$$

e quindi il sistema (5), (8) risulterà invertibile fra un intorno del punto $\overline{\Gamma}_0$ e un intorno del punto O'. Di conseguenza, se chiamiamo V quella parte

della varietà di equazioni (6) sulla quale è verificata la (7), possiamo dire, poichè $\overline{\Gamma}_0$ appartiene a V, che il sistema suddetto è invertibile fra un intorno su V del punto $\overline{\Gamma}_0$ e un intorno, appartenente all'S_3' di equazioni

$$L_r = 0 \qquad (r = 4, 5, \ldots 9) ,$$

del punto O'. Il massimo intorno di $\overline{\Gamma}_0$, che goda di questa proprietà, contiene certamente quella porzione connessa D_1 di V (contenente $\overline{\Gamma}_0$) sulla quale J (Γ) si mantiene diverso da zero. Ovviamente, se indichiamo con D_1' il trasformato [1]) di D_1 mediante (5) e (8), possiamo dire che queste ultime stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra D_1 e D_1'. Da ciò segue che, se il punto di coordinate L_1, L_2, L_3 appartiene a D_1', il sistema (5), (6), (7) ammette in D_1 una ed una sola soluzione.

Se poi indichiamo con ρ_0 la distanza (certamente positiva) di O' dalla frontiera di D_1' possiamo anche dire che *il sistema* (5), (6), (7), *in corrispondenza ad ogni* **L** *tale che*

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 < \rho_0^2$$

ammette una ed una sola soluzione $\gamma \equiv \| \gamma_{rs} \|$ *che per* $L = 0$ *si riduca a* $\| \delta_{rs} \|$.

[1]) Si noti che se eliminiamo le γ_{rs} fra l'equazione

$$J(\Gamma) = 0$$

e le (5), (6), (7), si ottiene l'equazione del luogo dei punti di S_3' in corrispondenza ai quali J (Γ) si annulla, cioè si ottiene una superficie della quale fa parte la frontiera di D_1'.

Per determinare D_1' basta fare questa eliminazione; si potrebbero, per esempio, eliminare le variabili

$$X = \sum_1^3{}_r \, A_{rr} \, \gamma_{rr}$$

$$Y = \sum_1^3{}_r \, A_{r+1,r+1} \, A_{r+2,r+2} \, \gamma_{rr}$$

fra l'equazione $J(\Gamma) = 0$, che si può scrivere

$$X \, Y - A_{11} \, A_{22} \, A_{33} = 0,$$

e le altre due

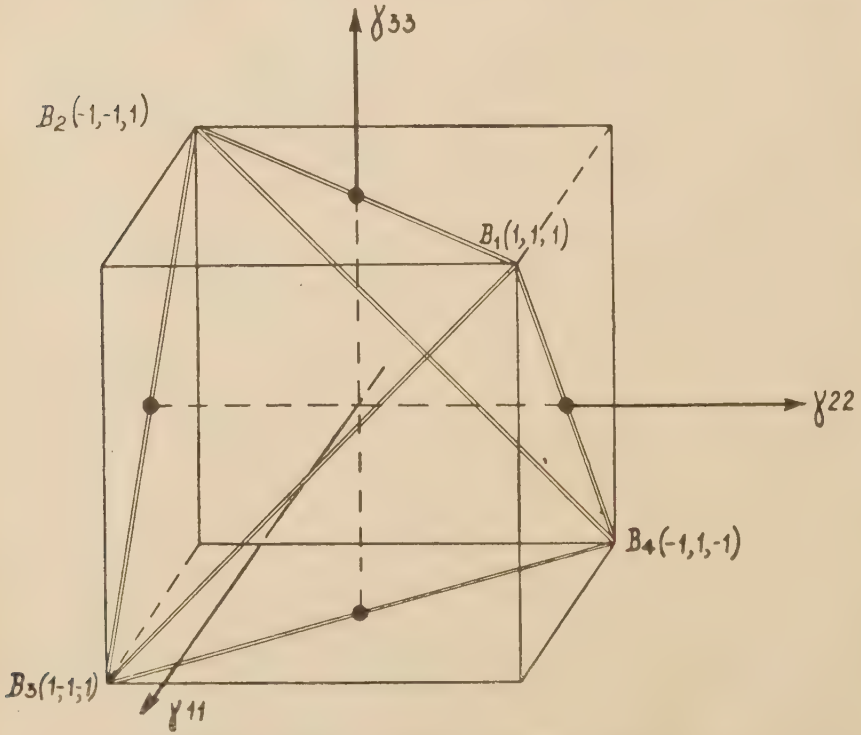
$$\sum_1^3{}_r \left(L_r^2 - A_{r+1,r+1}^2 \right) + 2 \, Y \qquad X^2 = 0$$

$$\sum_1^3{}_r \, A_{rr}^2 \left(L_r^2 - A_{r+1,r+1}^2 \right) + Y^2 - 2 A_{11} \, A_{22} \, A_{33} \, X = 0,$$

che si ottengono da (5) e (6): la prima quadrando e sommando le (5) e tenendo poi conto delle (6), la seconda moltiplicando le (5) rispettivamente per A_{11}, A_{22}, A_{33} e poi quadrando e sommando.

Quanto abbiamo detto per $\overline{\Gamma}_0$ si può ripetere per ogni $\overline{\Gamma}$ tale che S $(\overline{\gamma})$ sia privo di assi di equilibrio: resta quindi dimostrato il teorema enunciato sopra.

5. Acceniamo ora ad una rappresentazione geometrica dei rotori [1]) che ci sarà utile nel seguito. Consideriamo, in uno spazio a tre dimensioni, il tetraedro $\mathfrak{C}$ di vertici $B_1\,(1,\,1,\,1)$, $B_2\,(-1,\,-1,\,1)$, $B_3\,(1,\,-1,\,-1)$, $B_4\,(-1,\,1,\,-1)$ e diciamo corrispondente del rotore $\gamma \equiv \| \gamma_{rs} \|$ in tale spazio il punto di coordinate γ_{11}, γ_{22}, γ_{33}. Si dimostra che ad ogni rotore viene così a corrispondere un punto di $\mathfrak{C}$ e ad ogni punto di $\mathfrak{C}$ otto rotori se detto punto è interno, uno se coincide con un vertice, due se appartiene ad uno spigolo. Di conseguenza anche le configurazioni di S vengono ad essere in corrispondenza con i punti di $\mathfrak{C}$: ad ogni configurazione di S corrisponde un punto di $\mathfrak{C}$ e ad ogni punto di $\mathfrak{C}$ otto configurazioni di S se il punto è interno, due se appartiene ad uno spigolo, una se coincide con un vertice.



Scelta la terna di riferimento $\mathfrak{T}$ nel modo precisato al n. 3, si dimostra inoltre che i vertici di $\mathfrak{C}$ corrispondono alle quattro configurazioni di

[1]) Cfr. il secondo lavoro cit in [2]).

equilibrio previste dal teorema di Da Silva e che, se c'è un asse o una giacitura di assi di equilibrio, le configurazioni di equilibrio ad essi relative hanno per corrispondenti rispettivamente i punti di uno spigolo o di una faccia di $\mathcal{C}$.

Ciò premesso, mostriamo che, in un intorno sufficientemente piccolo di una configurazione di equilibrio dotata di un sol asse di equilibrio, il momento della sollecitazione S non è mai parallelo a detto asse; mostriamo cioè che, se $S(\bar{\gamma})$ ha un sol asse di equilibrio, si può determinare un numero positivo η tale che, per

$$|\gamma_{rs} - \bar{\gamma}_{rs}| < \eta ,$$

il momento di $S(\gamma)$ non riesca mai parallelo all'asse di equilibrio.

Supponiamo per esempio che S abbia un asse di equilibrio soltanto, quello delle y_3; sarà allora

$$A_{11} + A_{22} = 0 ; \qquad A_{11} + A_{33} \neq 0 ; \qquad A_{22} + A_{33} \neq 0.$$

Inoltre, indicato con $\bar{\gamma}_1 \equiv \| \bar{\gamma}^{(1)}_{rs} \|$ un generico rotore avente per asse quello delle y_3, avremo che ogni sistema $S(\bar{\gamma}_1)$ ammetterà quest'ultimo come asse di equilibrio. Le (5) diventano nelle nostre ipotesi

$$(10) \qquad \begin{cases} \gamma_{32} A_{11} + \gamma_{23} A_{33} = L_1 \\ \gamma_{13} A_{33} - \gamma_{31} A_{11} = L_2 \\ A_{11} (\gamma_{21} + \gamma_{12}) = L_3 \end{cases}$$

Determiniamoci il luogo dei punti di $\mathcal{C}$ corrispondenti a configurazioni nelle quali la sollecitazione S abbia momento parallelo all'asse di equilibrio, cioè tali che sia $L_1 = L_2 = 0$. Dalle (10), quadrando e sommando le prime due, si ha:

$$A_{11}^2 (\gamma_{32}^2 + \gamma_{31}^2) + A_{33}^2 (\gamma_{23}^2 + \gamma_{13}^2) + 2A_{11} A_{33} (\gamma_{23} \gamma_{32} - \gamma_{13} \gamma_{31}) = 0$$

e, tenendo conto del fatto che nella matrice $\| \gamma_{rs} \|$ ogni elemento coincide col proprio complemento algebrico,

$$(11) \quad (A_{11}^2 + A_{33}^2)(1 - \gamma_{33}^2) + 2A_{11} A_{33} (\gamma_{22} \gamma_{33} - \gamma_{11} - \gamma_{11} \gamma_{33} + \gamma_{22}) = 0.$$

Ponendo

$$\frac{A_{11}^2 + A_{33}^2}{A_{11} A_{33}} = l$$

la (11) si può scrivere

$$(1 + \gamma_{33}) [1 - \gamma_{33} + 2l (\gamma_{22} - \gamma_{11})] = 0$$

e questa si spezza in

$$1 + \gamma_{33} = 0$$

$$\gamma_{33} + 2l (\gamma_{11} - \gamma_{22}) - 1 = 0$$

Il luogo cercato è quindi costituito dai punti che questi due piani hanno in comune con $\mathcal{C}$, cioè dagli spigoli B_1B_2 e B_3B_4. Ciò perchè, essendo $\frac{1}{l}$ somma di due numeri reciproci diversi dall' unità, è

$$\frac{1}{|l|} > 2.$$

Poichè i punti dello spigolo B_1B_2 corrispondono a configurazioni equilibrate del sistema ed il punto corrispondente a $\bar{\gamma}_1$ appartiene appunto a tale spigolo, è evidente che è possibile trovare un numero positivo η che goda della proprietà enunciata.

6. Supponiamo ancora che $S(\bar{\gamma}_1)$ abbia un solo asse di equilibrio; vogliamo dimostrare che, *assegnato un vettore* **L'** *normale all' asse di equilibrio e sufficientemente piccolo, esiste un rotore* γ, *prossimo a* $\bar{\gamma}_1$ *e tale che il componente del momento* $\mathfrak{M}(\gamma)$ *secondo la normale all'asse di equilibrio risulti uguale ad* **L'**.

Siccome $S(\bar{\gamma}_1)$ ha un solo asse di equilibrio (l' asse y_3), la matrice dell' omografia $\nu_{(\bar{\gamma}_1)}$ ha caratteristica due, anzi il solo minore di ordine due diverso da zero è il complemento algebrico C_{33} dell' elemento di terza riga, terza colonna. Segue di qui, se con $\bar{\Gamma}_1$ indichiamo il punto immagine di $\bar{\gamma}_1$, che il determinante $J(\bar{\Gamma}_1)$ avrà caratteristica otto. Infatti i due minori ottenuti da esso sopprimendo la nona riga e la prima oppure la seconda colonna sono, a meno del segno, uguali a

$$\bar{\gamma}_{12}^{(1)} C_{33}, \qquad \bar{\gamma}_{11}^{(1)} C_{33}$$

e non può essere $\bar{\gamma}_{11}^{(1)} = \bar{\gamma}_{12}^{(1)} = 0$.

Supponiamo che sia $\bar{\gamma}_{11}^{(1)} \neq 0$ e consideriamo il sistema costituito da (6), (7) e dalle prime due equazioni (10) dopo aver sostituito $\bar{\gamma}_{12}^{1}$ al posto di

γ_{12}. Tale sistema è ovviamente verificato per

$$L_1 = L_2 = 0 , \qquad \gamma_{rs} = \overline{\gamma}^{(1)}_{rs}$$

ed inoltre lo Jacobiano dei membri rispetto alle γ_{rs} diverse da γ_{12}, calcolato nel punto $\overline{\Gamma}_1$, non è nullo in quanto uguale al minore che si ottiene da $J(\overline{\Gamma}_1)$ sopprimendo la nona riga e la seconda colonna, cioè a $\overline{\gamma}^{(1)}_{11} C_{33}$. Ciò dimostra appunto quanto affermato a principio di questo numero.

7. Supponiamo ora che il sistema S ammetta una sola giacitura di assi di equilibrio, quella del piano $y_1 y_2$. I rotori $\overline{\gamma}'$ aventi l'asse parallelo a detta giacitura, e quindi anche le configurazioni (di equilibrio) ad essi relative, avranno per corrispondenti, nella rappresentazione geometrica di cui si è parlato al n. 5, i punti della faccia $B_1 B_3 B_4$ di $\mathfrak{C}$. Indichiamo con $\overline{\gamma}_2 \equiv \| \overline{\gamma}^{2}_{rs} \|$ un rotore corrispondente ad un punto di tale faccia che non appartenga però allo spigolo $B_3 B_4$; vogliamo provare che, nelle configurazioni prossime a quella individuata da $\overline{\gamma}_2$, il momento della sollecitazione non può mai essere parallelo alla giacitura di assi di equilibrio, cioè che è possibile determinare un $\eta > 0$ in modo che, per

$$| \gamma_{rs} - \overline{\gamma}^{(2)}_{rs} | < \eta ,$$

il momento di $S(\gamma)$ non riesca mai parallelo a detta giacitura.

Nelle ipotesi in cui ci siamo posti è

$$A_{22} + A_{33} = 0 , \qquad A_{33} + A_{11} = 0 , \qquad A_{11} + A_{22} \neq 0$$

e perciò le (5) diventano

$$(12) \qquad \begin{cases} A_{11} (\gamma_{23} + \gamma_{32}) = L_1 \\ - A_{11} (\gamma_{13} + \gamma_{31}) = L_2 \\ A_{11} (\gamma_{21} - \gamma_{12}) = L_3 \end{cases}$$

Determiniamoci il luogo dei punti di $\mathfrak{C}$ a cui corrispondono configurazioni nelle quali la sollecitazione ha momento $M(\gamma)$ parallelo alla giacitura di assi di equilibrio. Poichè

$$(\gamma_{21} - \gamma_{12})^2 = \gamma^2_{21} + \gamma^2_{12} - 2 \gamma_{12} \gamma_{21} = 1 - \gamma^2_{11} - \gamma^2_{13} + 1 - \gamma^2_{22} - \gamma^2_{23} - 2 \gamma_{12} \gamma_{21} =$$

$$= 1 + \gamma^2_{33} - \gamma^2_{11} - \gamma^2_{22} - 2 (\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{33}) = (1 + \gamma_{33})^2 - (\gamma_{11} + \gamma_{22})^2 =$$

$$= (1 + \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}) (1 - \gamma_{11} - \gamma_{22} + \gamma_{33}) ,$$

tale luogo è costituito dai punti che i due piani

$$\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} + 1 = 0$$
$$-\gamma_{11} - \gamma_{22} + \gamma_{33} + 1 = 0$$

hanno in comune con $\mathcal{C}$, cioè dalle facce $B_2 B_3 B_4$ e $B_1 B_3 B_4$. Poichè i punti della seconda corrispondono a configurazioni di equilibrio ed il punto corrispondente a $\overline{\gamma}_2$ non appartiene alla prima, è evidente la possibilità di determinare η nel modo detto.

Con un ragionamento analogo a quello fatto nel numero precedente si dimostra, nelle nostre ipotesi, che, *assegnato un vettore* $\mathbf{L}''$ *normale alla giacitura di assi di equilibrio e sufficientemente piccolo, esiste una configurazione, prossima a quella individuata da* $\overline{\gamma}_2$, *nella quale il componente di* $\mathbf{M}(\gamma)$ *secondo la normale a detta giacitura risulta uguale ad* $\mathbf{L}''$.

Da quanto abbiamo detto in questo e nei numeri precedenti seguono immediatamente i risultati I), II) e III) enunciati al n. 1.

8. Indichiamo con θ un parametro reale e supponiamo che sui generici elementi $d\mathrm{C}_*$ e $d\Sigma_*$ agiscano, invece delle (1), le forze

$$(13) \qquad [\mathrm{P}_*, \theta k_* \mathbf{F}(\mathrm{P}_*)\, d\mathrm{C}_*] , \quad [\mathrm{Q}^*, \theta \mathbf{f}^*(\mathrm{Q}_*)\, d\Sigma_*] ;$$

supporremo inoltre che la nuova sollecitazione S′ agente sul solido sia equilibrata ma priva di assi di equilibrio. Vediamo come in questo caso vengono a modificarsi le considerazioni del n. 4. Ponendo

$$\mathrm{A}'_{rs} = \int_{\mathrm{C}_*} y_r\, \theta k_*\, \mathrm{F}_s\, d\mathrm{C}_* + \int_{\Sigma_*} y_r\, \theta f_s^*\, d\Sigma_* ,$$

si ha

$$\mathrm{A}'_{rs} = \theta \mathrm{A}_{rs} ;$$

quindi delle equazioni scritte al n. 4 cambieranno soltanto le (5), nelle quali, al posto delle A_{rs}, figureranno le A'_{rs}. Si osservi però che, se si fa la sostituzione

$$(14) \qquad \mathrm{L}_r = \theta \mathrm{L}'_r ,$$

esse riacquistano la forma primitiva. Da ciò si deduce che il passaggio dalla sollecitazione S a quella parallela S′ lascia inalterato tutto ciò che si è detto al n. 4, salvo le deduzioni in cui interviene lo spazio $\mathcal{S}'_3$; queste ultime varranno ancora però nello spazio $\mathcal{S}_3''$ delle coordinate L_1', L_2', L_3' legato ad $\mathcal{S}'_3$ dalla similitudine di equazioni (14). Possiamo perciò dire che il passaggio da S ad S′ non altera alcuna delle deduzioni del n. 4, soltanto

D_1' si trasforma per similitudine. Ciò ci permette di affermare che, *se la sollecitazione equilibrata* S' *non ha alcun asse di equilibrio, è possibile trovare un numero positivo* ρ_0, *indipendente da* θ, *tale che :*

a) *comunque si assegni un vettore* L *verificante la disuguaglianza*

$$L \leqq \rho_0 \mid \theta \mid , \tag{15}$$

esiste uno ed un sol rotore $\gamma = \| \gamma_{rs} \|$ *che, applicato ai vettori della sollecitazione* S', *trasformi questa in un' altra di momento* L *e che per* $L = 0$ *si riduca a* $\| \delta_{rs} \|$;

b) *al variare di* L *in modo da verificare la* (15), *il punto* Γ, *immagine di detto rotore* γ *nello spazio* $\mathfrak{S}_9$, *descrive un dominio* D *sulla varietà* V *nel quale* J (Γ) *si mantiene diverso da zero.*

CONCORSO AL PREMIO BIENNALE ACCADEMICO PER GLI ANNI 1955-56.

L' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, bandisce il concorso al premio biennale accademico per gli anni 1955-1956.

Il premio, di L. 50.000, sarà assegnato all' autore della migliore memoria sul tema : « *Ricerche sulla morfologia comparata dei metameri negli Artropodi* ».

Al concorso possono partecipare soltanto i cittadini italiani, esclusi i soci della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Le memorie devono essere scritte in lingua italiana e pervenire alla Segreteria dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, nella sede di questa (via Mezzocannone, 8), entro le ore 12 del dì 31 ottobre 1956.

Ciascuna memoria non porterà il nome dell' autore, ma sarà distinta con un motto, il quale dovrà essere ripetuto sopra una busta suggellata, che conterrà la scheda recante il nome dell' autore.

Le buste della memoria premiata e di quelle che avranno ottenuto l' *acessit* saranno aperte nell' adunanza plenaria del gennaio 1957 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Tutte le memorie presentate al concorso saranno conservate nell' archivio dell' Accademia banditrice.

Napoli, 3 gennaio 1955.

Il Segretario
GEREMIA D' ERASMO

Il Presidente
VINCENZO DIAMARE

RELAZIONE DELLA COMMISSIONE GIUDICATRICE PER IL CONCORSO AL PREMIO BIENNALE 1953-54 BANDITO DALL'ACCADEMIA DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE DELLA SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI IN NAPOLI SUL TEMA: « *Contributo allo studio dei gruppi o delle algebre dal punto di vista della teoria dei reticoli* ».

La memoria contrassegnata dal motto « *Chi spera vive* » è dedicata alla determinazione degli elementi modulari nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito. Un elemento m di un reticolo vien detto *modulare* se, comunque si scelga un sottoreticolo modulare R del reticolo dato, il sottoreticolo generato da m ed R risulta ancora modulare. Tale concetto è analogo a quello di elemento neutro di un reticolo, che si ottiene da quello di elemento modulare sostituendo, nella definizione di questo ultimo, la parola « distributivo » alla parola « modulare ». Ma lo studio degli elementi modulari è assai più difficile di quello degli elementi distributivi, essendo i reticoli modulari molto più complessi e generali di quelli distributivi. La memoria in questione affronta per la prima volta lo studio degli elementi modulari di un reticolo, con particolare riferimento al reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito.

L'Autore stabilisce anzitutto alcune proprietà generali di cui godono gli elementi modulari in un reticolo L qualunque, tra cui segnaliamo il fatto che gli elementi neutri sono anche modulari, e alcuni teoremi di « riduzione » che permettono di limitare lo studio degli elementi modulari ai reticoli semplici. Indi passa allo studio degli elementi modulari nel reticolo dei sottogruppi di un p-gruppo, mostrando anzitutto che un tale elemento deve essere un sottogruppo permutabile con ogni sottogruppo del gruppo. Successivamente l'A. prova che nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo in cui ogni elemento ha ordine p (p primo), o si hanno i soli elementi modulari « banali », costituiti dal gruppo stesso e dal sottogruppo identico, oppure ogni sottogruppo è un elemento modulare, e quindi il reticolo di tutti i sottogruppi è esso stesso modulare. Dopo una applicazione di questo risultato al caso di un p-gruppo qualunque, l'A. fornisce un esempio, alquanto riposto, di un p-gruppo in cui il reticolo dei sottogruppi, pur non essendo modulare, contiene un elemento modulare non banale. Infine l'A. risolve completamente il problema della determinazione degli elementi modulari in un gruppo di HÖLDER, mostrando che un sottogruppo H di un gruppo di HÖLDER G è un elemento modulare nel reticolo dei sottogruppi di G se e solo se appartiene ad uno dei seguenti tre tipi:

a) H è tale che risulti $G = H \times M$,

b) H è un sottogruppo di Sylow di G appartenente ad un sottogruppo T d'ordine pq (p e q numeri primi distinti) non ciclico, con $G = T \times N$,

c) H è unione di un sottogruppo del tipo *a*) con uno del tipo *b*).

L'A., muovendosi su un argomento del tutto nuovo che nulla poteva giovare la falsariga di altri lavori, è pervenuto, superando questioni difficili, a risultati profondi e importanti, aprendo in tal modo la strada alla determinazione di tutti gli elementi modulari nel reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito qualunque. Egli ha mostrato vasta conoscenza della teoria dei Gruppi e di quella dei Reticoli, e notevole abilità a muoversi in campi insidiosi ed oscuri. La memoria contrassegnata dal motto « *chi spera vive* », appare pertanto pienamente meritevole del premio dell'Accademia.

La memoria contrassegnata dal motto « *Non c'è scienza senza ritener lo avere inteso* », studia il gruppo degli automorfismi del reticolo dei laterali dei sottogruppi di un gruppo finito. L'attenzione su tale reticolo fu portata la prima volta dal Birkhoff, in uno dei problemi proposti nella sua « Lattice theory »; successivamente tale reticolo fu studiato preliminarmente in una nota di Curzio, i cui risultati sono dall'A. riportati all'inizio della memoria. Una prima parte di questa è dedicata allo studio delle proprietà generali del gruppo degli automorfismi del reticolo dei laterali dei sottogruppi di un gruppo, o S-automorfo del gruppo. L'attenzione è portata in particolare sul sottogruppo E_G dell'S-automorfo S_G del gruppo G, formato da quegli automorfismi del reticolo dei laterali che lascino fermo l'elemento unità, e si prova fra l'altro che E_G in generale (cioè, salvo il caso che consti della sola identità), non è normale in S_G, che l'intersezione di E_G col centro di S_G è identica, che E_G ammette in S_G un complemento isomorfo a G, che se G è a centro identico, anche S_G lo è. Successivamente l'A. affronta lo studio dell'S-automorfo di un gruppo speciale finito, provando che esso si può opportunamente esprimere in funzione degli S-automorfi dei suoi sottogruppi di Sylow. Infine l'A. studia l'S-automorfo di un gruppo ciclico, mostrando che l'S-automorfo di un gruppo finito di ordine m è isomorfo al gruppo totale di sostituzioni su m oggetti quando e solo quando il gruppo è ciclico d'ordine primo o quadrinomio, e determinando l'ordine e la struttura dell'S-automorfo dei gruppi ciclici il cui ordine è potenza di un numero primo e dei gruppi ciclici il cui ordine è prodotto di numeri primi distinti.

La memoria è redatta in uno stile vivace e spigliato e consegue molte eleganti proprietà dell'S-automorfo. I risultati raggiunti costituiscono un primo importante avvio verso la determinazione dell'S-automorfo di un gruppo, ed è da augurarsi che l'A. voglia proseguire le ricerche qui brillantemente intraprese. Anch'egli ha dimostrato spiccata attitudine a questo

genere di studi. Pertanto la sua memoria, pur non essendo molto vasta, appare, in linea assoluta, meritevole del premio dell' Accademia.

Essendo però, per regolamento, il premio indivisibile, è necessario procedere ad un esame comparativo delle due memorie. Essendo la memoria « *chi spera vive* » più ampia (30 pagine contro 13), affrontando essa questioni alquanto più difficili e conseguendo risultati più profondi, appare indubbio che essa debba essere anteposta all' altra, ed ottenere quindi lo ambito premio.

Napoli, 4 dicembre 1954.

La Commissione:

Nicolò Spampinato
Renato Caccioppoli
Guido Zappa

Processo verbale dell' adunanza del dì 2 gennaio 1954.

Presidenza del presidente Colamonico. Assistono i soci ordinari residenti Bakunin, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Giordani, Imbò, Miranda, Nobile, Salfi, Scherillo, Spampinato, Zappa, ed il socio ordinario non residente Picone.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 5 dicembre, che è approvato. Indi comunica le principali deliberazioni prese dal Consiglio generale della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti nella tornata del 28 dicembre, ed annunzia che sul fondo straordinario recentemente concesso alla Società dal Ministero della Pubblica Istruzione sono state assegnate all' Accademia di Scienze fisiche e matematiche lire 600.000. Partecipa quindi che il socio ordinario residente Zappa, essendosi trasferito col 15 dicembre da Napoli a Firenze, viene assegnato, a norma dell' art. 5 dello Statuto sociale, alla categoria dei soci ordinari non residenti, in soprannumero.

Informa infine che la redazione del Chemisches Zentralblatt di Berlino chiede il ripristino del cambio del Rendiconto, interrotto dopo la guerra. — L' Accademia acconsente.

Su conforme parere delle rispettive Commissioni nominate nella precedente adunanza, vengono alla unanimità approvate, per la inserzione nel Rendiconto, le note appresso elencate: 1) Sersale Riccardo, *Indagini sul comportamento termico delle rocce calcaree* (presentata dal socio Mal-

quori); 2) Franciosi Vincenzo, *Il principio di equivalenza nelle strutture monodimensionali soggette a distorsioni concentrate* (presentata dal socio Galli); 3) Balsimelli Pio, *Studio di una trasformazione birazionale dello* S_3 *complesso determinata da una trasformazione quadratica biduale* (presentata dal socio Spampinato); 4) Fadini Angelo, *Studio di una trasformazione Cremoniana dell'* S_n *dedotta da una trasformazione quadratica dell'* S_2 *triduale avente i tre punti eccezionali coincidenti;* 5) Mennella Cristofaro, *Andamento annuale medio e andamento reale della pioggia a Napoli (Capodimonte),* (presentata dal socio Colamonico).

Il socio Picone informa che l'Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo da lui diretto è stato incaricato dal Provveditorato alle opere Pubbliche di Bologna di un problema interessante di Analisi matematica sulla cui soluzione si ha il progetto di fondare norme razionali per la costruzione degli argini dei grandi fiumi. Il problema comporta un'analisi esistenziale del più alto interesse, per la quale il prof. Picone ha chiesto ed ottenuto la collaborazione dei consoci Caccioppoli e Miranda. E' lieto con ciò di dimostrare all'Accademia che anche la matematica nella sua accezione più elevata può essere impiegata per compiti immediati di altissimo interesse nazionale.

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 febbraio 1954.

Partecipano all'adunanza, presieduta dal presidente Colamonico, i soci ordinari residenti Bakunin, De Lorenzo, D'Erasmo (segretario), Giordani, Imbò, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, ed i soci corrispondenti Beretta ed Orrù.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 2 gennaio, che è approvato. Indi comunica: 1°) la Ministeriale 16 gennaio, relativa all'approvazione della nomina del prof. Vincenzo Diamare a vice-presidente della Accademia di Scienze fisiche e matematiche per l'anno 1954; 2°) la circolare 22 gennaio dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, relativa al Convegno Nazionale delle Accademie di Scienze e Lettere italiane che avrà luogo a Milano, nella sede di Brera, nella primavera del 1954. — L'Accademia stabilisce d'inviare la sua cordiale adesione e di farsi rappresentare dal consocio Salfi; 3°) la lettera 23 gennaio del Comitato organizzativo della Commemorazione del centenario della nascita di Henri Poincaré. — L'Accademia decide di farsi rappresentare dal consocio Signorini; 4°) la circolare-programma del Congresso Internazionale dei Matematici, che avrà luogo ad Amsterdam dal 2 al 9 Settembre 1954. — L'Accademia vi sarà rappresentata dai soci Picone e Miranda.

Il Segretario presenta quindi l'Annuario 1954 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, recentemente distribuito ai soci.

Fra le pubblicazioni pervenute in omaggio sono segnalate quelle dell' Istituto per le applicazioni del calcolo, offerte dal consocio Picone, ed il volume VII delle *Memorie di geografia economica,* comprendente un lavoro del socio Colamonico *Per la carta della utilizzazione del suolo di Italia.*

In una breve comunicazione verbale, il socio D' Erasmo espone all' Accademia i risultati della nuova livellazione di precisione recentemente eseguita a cura della Divisione Geodetica dell' Istituto Geografico Militare nella zona compresa tra Napoli e Pozzuoli. Ricordando ciò che egli comunicò alla Accademia, nello scorso giugno, nell' offrire una sua breve pubblicazione *A proposito di una nota del prof. Luigi Ranieri sul bradisismo del Serapeo di Pozzuoli,* fa rilevare che la riquotazione dei caposaldi di quella zona fu richiesta, nel giugno 1952, dalla Società dei Naturalisti di Napoli, dopo un interessante dibattito scientifico provocato dalla predetta nota del prof. Luigi Ranieri e dalla risposta del prof. Antonio Parascandola. Secondo il primo di questi studiosi, un movimento di innalzamento del Serapeo, di ben 386 mm., si sarebbe verificato « nei dodici mesi intercorsi tra il settembre 1950 e l' agosto 1951 »; secondo il Parascandola, invece, nessuna inversione si sarebbe avuta, in questi ultimi anni, nel bradisismo di quella plaga, il quale prosegue la lenta ma inesorabile fase positiva, cioè di abbassamento della terra, iniziatasi dal XVII secolo. Il benemerito Istituto Geografico Militare, che accogliendo quel voto ha voluto contribuire a risolvere una questione di grande importanza scientifica e pratica, gli ha ora comunicato i risultati definitivi della rideterminazione altimetrica eseguita nell' ottobre-novembre 1953, mentre una nota più dettagliata sullo argomento sarà prossimamente pubblicata nel Bollettino di Geodesia e scienze affini. Paragonati con i dati offerti dalle precedenti livellazioni, compiute dallo stesso Istituto nel 1905 e nel 1919, tali risultati dimostrano che « nel periodo 1919-1953 è continuato il movimento di abbassamento dalla Chiesa di S. Antonio Ardito al Tempio di Serapide, raggiungendo il massimo in Pozzuoli ed in particolare alla Capitaneria del Porto ». Più precisamente — riportando qui le sole variazioni relative al Serapeo di Pozzuoli e tralasciando, per brevità, quelle relative agli altri caposaldi — dal 1905 al 1919 ci fu un abbassamento di mm. 176, ossia di mm. 12,6 all' anno; dal 1919 al 1953 un abbassamento di mm. 398, cioè di mm. 11,7 all' anno.

Il socio tesoriere Scherillo presenta il bilancio consuntivo dell' anno 1953. L' Accademia nomina revisori dei conti i soci Spampinato e Pierantoni, con l' incarico di riferire in una delle prossime tornate.

Processo verbale dell' adunanza del dì 6 marzo 1954.

Presiede il presidente Colamonico, segretario il socio D' Erasmo. Sono presenti i soci ordinari residenti Bakunin, De Lorenzo, Diamare, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato ed il corrispondente Covello.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 6 febbraio, che è approvato. Indi presenta il volume XX della serie 4ª del Rendiconto, relativo all' anno 1953, recentemente pubblicato e distribuito ai soci. Informa poi che i colleghi proff. Signorini e Picone hanno cortesemente accettato l' incarico di rappresentare l' Accademia rispettivamente alla commemorazione del centenario della nascita di Henri Poincaré e al Congresso Internazionale dei Matematici di Amsterdam.

Fra le pubblicazioni pervenute in omaggio è segnalata la nota offerta dal socio De Lorenzo su *La costituzione geologica dei terreni meridionali,* nonchè l' *Annuario dell' Istituto e Museo di Zoologia dell' Università di Napoli,* vol. V, 1953, donato dal socio Salfi. — L' Accademia ringrazia i donatori.

L' Accademia accoglie quindi la proposta di cambio del Rendiconto con la *Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin.*

Il segretario presenta, a nome del socio Galli che scusa l' assenza, una nota del prof. Franco Mazzarella, *Determinazione delle componenti di secondo ordine della deformazione riferite ad un generico sistema di coordinate curvilinee.* Il presidente incarica di riferire su di essa la Commissione composta dai soci Galli, Miranda e Tolotti.

Il socio Spampinato presenta una sua nota *Su alcune varietà dell'* S_{11} *determinate dall' algebra triduale come sottoalgebra dell' algebra dei numeri doppio-biduali,* e una nota del dott. Pio Balsimelli dal titolo: *Una trasformazione quadratica biduale e la relativa trasformazione cremoniana nell'* S_5 *ambiente della congruenza* Γ. — Il Presidente nomina la Commissione Spampinato, Miranda, Caccioppoli perchè riferisca su questo lavoro in una prossima adunanza.

I revisori dei conti leggono la relazione sul bilancio consuntivo dello anno 1953, che conclude con la proposta di approvazione. — L' Accademia unanime approva.

Processo verbale dell' adunanza del dì 3 aprile 1954.

Presiede il presidente Colamonico, essendo presenti i soci ordinari residenti Bakunin, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo ed il socio non residente Armellini.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 6 marzo, che è

approvato. Indi comunica 1°): l'invito del presidente della Società Geografica Italiana a partecipare alla solenne manifestazione di stima e di affetto che sarà tributata in Roma, il 5 aprile prossimo, al prof. Giotto Dainelli in occasione del 75° anno di età e del 50° di appartenenza a quel Sodalizio. — L'Accademia decide all'unanimità d'inviare la sua più cordiale adesione pregando il consocio Milone di volerla rappresentare a quella cerimonia;

2°) l'invito del Comitato Esecutivo dell'VIII Congresso Internazionale di Botanica a partecipare alle riunioni che avranno luogo a Parigi dal 2 al 14 luglio venturo. — L'Accademia stabilisce d'inviare la sua viva adesione a tale Congresso, che si preannunzia di grande interesse tecnico e scientifico;

3°) la circolare della Presidenza del Consiglio dei Ministri, relativa al contributo alle riviste di elevato valore culturale, e la domanda di sussidio inviata, in data 26 marzo 1954, a nome dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche per la pubblicazione dei propri Rendiconti ed Atti.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalata la nota del socio G. De Lorenzo dal titolo: *Del « frate asino » di San Francesco.*

La Commissione Galli, Miranda e Tolotti riferisce sulla nota del prof. Franco Mazzarella, *Determinazione delle componenti di secondo ordine della deformazione riferite ad un generico sistema di coordinate curvilinee,* proponendone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto. — La Accademia unanime approva.

In seduta privata, si stabilisce di convocare separatamente, alle ore 10.30′ del giorno 15 maggio venturo, le due Sezioni di Scienze naturali e di Scienze matematiche per eventuali accordi sui nomi dei candidati da proporre ai posti di socio vacanti nelle diverse categorie.

Processo verbale dell'adunanza del dì 15 maggio 1954.

Assistono all'adunanza il presidente Colamonico, i soci ordinari residenti Bakunin, Caccioppoli, De Lorenzo, D'Erasmo (segretario), Diamare, Galli, Imbò, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, Tolotti, ed il socio corrispondente Orrù.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 3 aprile, che è approvato. Indi comunica: 1°) i ringraziamenti del socio Dainelli per la partecipazione dell'Accademia alle onoranze recentemente tributategli in Roma per iniziativa della Società geografica italiana; 2°) la circolare-invito del Congresso Internazionale di Etnografia e Folklore del mare, che avrà luogo in Napoli dal 3 al 12 ottobre 1954. — L'Accademia delibera d'inviare la propria adesione; 3°) la richiesta di cambio delle pubblicazioni da parte dell'Archivio di Oceanografia e Limnologia di Venezia, dell'Ac-

cademia della Repubblica popolare Rumena di Bucarest, dell' Istituto di Geologia e di Mineralogia dell' Università di Besançon e dell' Osservatorio Geofisico di Ischia. — L' Accademia acconsente.

L' Accademia prende quindi in esame — su invito del Presidente della Commissione giudicatrice prof. Francesco Giordani che richiede una designazione del Sodalizio — le norme relative all' attribuzione del premio « Urania » istituito, insieme con altri premi intitolati a « Le Nove Muse », dal Comune di Napoli e destinato per l' anno 1954 alle Scienze matematiche ed alle Scienze fisiche (due premi indivisibili di Lire 1.500.000 ciascuno). Letto il Regolamento ed il bando di concorso, il segretario comunica una lettera del consocio prof. Mauro Picone, componente della Commissione giudicatrice predetta, il quale con motivata relazione propone che il premio Urania del 1954 per le Scienze matematiche venga attribuito al prof. Carlo Miranda.

Il Presidente mette in discussione tale proposta, alla quale aderiscono entusiasticamente tutti i soci presenti; sicchè a voti unanimi l' Accademia la fa propria, ed il Presidente si riserba di presentarla, per l' approvazione, al Consiglio Generale della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, insieme con l' eventuale designazione riguardante l' analogo premio per le Scienze fisiche.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalata la nota del socio D' Erasmo su *La rideterminazione altimetrica del Serapeo di Pozzuoli eseguita dall' Istituto Geografico Militare nel 1953.*

La Commissione Spampinato, Miranda e Caccioppoli riferisce sulla nota del dott. Pio Balsimelli dal titolo *Una trasformazione quadratica biduale e la relativa trasformazione cremoniana nell'* S_5 *ambiente della congruenza* Γ. — L' Accademia a voti unanimi approva la conclusione, favorevole alla stampa nel Rendiconto.

Il socio De Lorenzo presenta una sua nota dal titolo: *Himâlaya nella arte e nella scienza.*

Il socio Galli presenta una nota del dott. Vincenzo Franciosi, *Contributo alla teoria generale delle linee d' influenza.* Il Presidente incarica la Commissione costituita dai soci Galli, Miranda e Tolotti di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Il socio D' Erasmo presenta una nota della dott. Maria Moncharmont Zei sopra *I foraminiferi della scogliera a Cladocora caespitosa della Punta delle Pietre Nere presso il lago di Lesina in provincia di Foggia*, e una nota del dott. Antonio Lazzari su *La sedimentazione dei terreni in facies di flysch secondo le antiche osservazioni di R. Zuber, con alcune considerazioni sul flysch dell' Italia meridionale.* — Viene incaricata la Commissione D' Erasmo, De Lorenzo e Scherillo di riferire su entrambi i lavori in una prossima tornata.

Il segretario presenta, a nome del socio non residente Carnera, la nota

del dott. Riccardo Barbatelli, *Determinazione di ascensione retta del pianetino Vesta e dei pianeti Urano e Giove.* — Il Presidente nomina la Commissione Carnera, Nobile e Imbò, con l'incarico di riferire prossimamente sul predetto lavoro.

Il socio Spampinato presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Su alcune varietà dell'* S_{23} *complesso determinate dall'algebra dei numeri quadriduali come sottoalgebra dei numeri triplo-biduali.*

Lo stesso socio Spampinato presenta inoltre, per il medesimo periodico, una nota del dott. Angelo Fadini, *La risoluzione delle equazioni di secondo e terzo grado nell'algebra dei numeri triduali,* e una nota del dott. Umberto Sardi dal titolo *Equazioni di secondo e terzo grado nella algebra di Study. Radici ennesime di un numero di Study.* Per entrambe queste note è incaricata di riferire la Commissione Spampinato, Caccioppoli, Miranda.

Processo verbale dell'adunanza del dì 5 giugno 1954.

Assistono all'adunanza, presieduta dal presidente Colamonico, i soci ordinari residenti Caccioppoli, De Lorenzo, D'Erasmo (segretario), Galli, Imbò, Miranda, Nobile, Scherillo, Tolotti.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 15 maggio, che è approvato. Indi comunica la lettera del consocio Carrelli, il quale anche a nome del collega prof. Imbò propone che il premio « Urania » del 1954 per le Scienze fisiche sia attribuito al prof. Eduardo Amaldi, direttore dell'Istituto Fisico dell'Università di Roma.

Il presidente mette in discussione tale proposta, che l'Accademia accoglie a voti unanimi. Anche questa designazione verrà pertanto trasmessa — insieme con quella relativa al premio per le scienze matematiche, già approvata nelle precedente adunanza — al Consiglio Generale della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti per la definitiva approvazione.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, sono segnalati la nota del socio De Lorenzo, *Himâlaya nell'arte e nella scienza,* e il volume *Delpinoa,* n. s., vol. VI, offerto dal socio corrispondente Catalano. — L'Accademia ringrazia i donatori.

La Commissione Galli, Miranda e Tolotti riferisce sulla nota del dott. Vincenzo Franciosi, *Contributo alla teoria generale delle linee d'influenza,* proponendone l'inserzione nel Rendiconto.

Il socio D'Erasmo, anche a nome dei colleghi De Lorenzo e Scherillo, legge le relazioni sulla nota della dott. Maria Moncharmont Zei sopra *I foraminiferi della scogliera a Cladocora caespitosa della Punta delle Pietre Nere presso il lago di Lesina in provincia di Foggia,* e su quella del dott. Antonio Lazzari su *La sedimentazione dei terreni in facies di flysch secondo le antiche osservazioni di R. Zuber, con alcune considerazioni sul flysch*

dell' Italia meridionale, concludendo con la proposta di accoglimento nel Rendiconto.

Uguale proposta di stampa nel medesimo periodico avanzano la Commissione Carnera, Nobile e Imbò nei riguardi della nota del dott. Riccardo Barbatelli, *Determinazione di ascensione retta del pianetino Vesta e dei pianeti Urano e Giove,* e la Commissione Spampinato, Caccioppoli e Miranda nei riguardi delle note del dott. Angelo Fadini, *La risoluzione delle equazioni di secondo e terzo grado nell' algebra dei numeri triduali* e del dott. Umberto Sardi, *Equazioni di secondo e terzo grado nell' algebra di Study. Radici ennesime di un numero di Study.* — Con distinte votazioni, l' Accademia approva alla unanimità la stampa di tutte le sei note predette.

Il socio D' Erasmo presenta una nota del dott. Vincenzo Minieri dal titolo *Ricerche geochimiche su alcune bauxiti di Terra d' Otranto.* E' incaricata di riferire su questo lavoro la Commissione D' Erasmo, De Lorenzo, Scherillo.

Il socio Scherillo, anche a nome dei soci De Lorenzo e D' Erasmo, legge la relazione sulla memoria del prof. Antonio Parascandola, *Contributo alla mineralogia vulcanica della Campania,* che venne premiata al concorso biennale accademico per gli anni 1951-52. Detta relazione si chiude con la proposta unanime d' inserire tale memoria nel volume in corso degli Atti, lasciando a carico dell' Autore la esecuzione dei clichés costituenti le due tavole annesse alla memoria, nonchè i grafici da inserirsi nel testo, e a carico dell' Accademia la carta e la stampa del testo e delle tavole predette. — La Accademia approva all' unanimità.

Il socio Tolotti presenta, per il Rendiconto, una nota del prof. Francesco Stoppelli, dal titolo *Una generalizzazione di un teorema di Da Silva.* Il presidente incarica della relativa relazione i soci Tolotti, Nobile e Miranda.

Si dovrebbe a questo punto procedere, secondo l' ordine del giorno, alla votazione sulle proposte delle Sezioni per la nomina ai posti di socio vacanti; ma, avendo constatato che il numero dei soci ordinari presenti all' adunanza non raggiunge quello minimo prescritto dall' art. 11 dello Statuto sociale, il Presidente rimanda la votazione alla tornata del Novembre venturo.

Si autorizza il Segretario ad accettare con le vigenti limitazioni, durante il periodo delle ferie estive, le note che i soci di qualsiasi categoria potranno eventualmente presentare per la inserzione nel Rendiconto.

Il presente verbale viene redatto, letto ed approvato seduta stante.

Processo verbale dell' adunanza del dì 6 novembre 1954.

Assistono all' adunanza, presieduta dal presidente Colamonico, i soci ordinari residenti Bakunin, Caccioppoli, De Lorenzo, D' Erasmo (segreta-

rio), Diamare, Galli, Imbò, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato ed il corrispondente Covello.

Il segretario comunica:

1) l'invito del Rettore dell'Università di Parma alla solenne commemorazione di Macedonio Melloni in occasione del centenario della morte: celebrazione, alla quale l'Accademia inviò la sua adesione, facendosi rappresentare dai consoci Antonio Carrelli e Giuseppe Imbò;

2) la domanda dell'Università di Rostock di stabilire il cambio delle pubblicazioni accademiche con la « Wissenschaftlichen Zeitschrift der Universität Rostock ». — L'Accademia acconsente, decidendo l'invio del Rendiconto dall'anno 1952 in poi;

3) la richiesta del socio straniero Gayre di cambio con le pubblicazioni del Department of Anthropogeography dell'Università di Saugar in India, da lui diretto. — L'Accademia stabilisce l'invio degli ultimi volumi degli Atti e del Rendiconto.

Informa quindi che è stata inserita nel volume in corso del Rendiconto la nota del socio De Lorenzo dal titolo *Tempo e spazio nel pensiero di Leopardi,* pervenuta all'Accademia il dì 1° settembre.

Dà poi notizia che al concorso al premio biennale accademico per gli anni 1953-54, scaduto il 30 ottobre scorso, sul tema « Contributo allo studio dei gruppi o delle algebre dal punto di vista della teoria dei reticoli » hanno partecipato in tempo utile due concorrenti, dei quali l'uno, contraddistinto dal motto « Chi spera, vive » ha inviato un lavoro manoscritto dal titolo *Sopra gli elementi modulari in un gruppo G, finito;* l'altro, contrassegnato dal motto « Non c'è scienza senza ritener lo avere inteso » ha fatto pervenire una nota dattiloscritta sopra *Gli automorfismi del reticolo dei laterali dei sottogruppi d'un gruppo.* — L'Accademia incarica la Commissione costituita dai soci Caccioppoli, Spampinato e Zappa di esaminare i lavori predetti e di riferire su di essi in una prossima adunanza.

Il presidente invita quindi i soci della Sezione di Scienze Naturali, a cui spetta la scelta del tema per il prossimo concorso relativo al biennio 1955-1956, a comunicare la loro decisione nella tornata del dicembre, per sottoporla in tempo utile all'approvazione dalla Classe, a norma dell'art. 18 dello Statuto.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in dono vengono segnalati il volume VIII delle *Memorie di geografia economica* (Ranieri, La regione del Vulture), offerto dal presidente Colamonico, e due note del socio D'Erasmo.

L'Accademia stabilisce quindi il calendario delle adunanze ordinarie dell'anno 1955, che viene fissato come segue: Gennaio 8, Febbraio 5, Marzo 5, Aprile 2, Maggio 7, Giugno 4, Novembre 5, Dicembre 3.

La Commissione D'Erasmo, De Lorenzo e Scherillo riferisce sulla nota

del dott. Vincenzo Minieri dal titolo *Ricerche geochimiche su alcune bauxiti di Terra d'Otranto,* concludendo con la proposta d'inserzione nel Rendiconto. — L'Accademia approva all'unanimità.

Il segretario presenta una memoria del socio ordinario non residente Giotto Dainelli dal titolo: *Termini stratigrafici locali della Regione Etiopica,* destinata alla inserzione nel volume in corso degli Atti. — L'Accademia approva alla unanimità.

Il socio D'Erasmo presenta una nota del dott. Vincenzo Minieri, *Aspetti geochimici di una particolare trasformazione del carbonato in fosfato di calcio nella grotta della « Zinzulusa » (Lecce).* — Il presidente incarica la Commissione D'Erasmo, De Lorenzo e Scherillo di riferire su questo lavoro nella successiva tornata.

Il prof. Spampinato presenta, per il Rendiconto, due sue note, rispettivamente dal titolo *Sulla* V_8^7 *dell'* S_{11} *contenente tutte le* V_6^{2n+m} *rispondenti alle curve di ordine n e classe m dell'* S_2, e dal titolo *La varietà* V_{22} *dell'* S_{39} *complesso determinata da una* V_3'' *dell'* S_4 *complesso prolungata nell'* S_4 *cinqueduale.*

Il socio Galli presenta una nota del dott. Tullio Renzulli, *Sul calcolo delle strutture monodimensionali in regime elastoplastico.* Viene incaricata di riferire su di essa la Commissione costituita dei soci Galli, Miranda, Tolotti.

Constatata la validità dell'adunanza, a norma dell'art. 11 dello Statuto sociale, per la votazione a cariche sociali, il presidente invita i soci ordinari a procedere, secondo l'ordine del giorno, alla direzione del vicepresidente per l'anno 1955.

Il Segretario dà lettura degli articoli dello Statuto e del Regolamento relativi a tale votazione e distribuisce le schede ai s ci ordinari residenti. La votazione, effettuata a scrutinio segreto, dà il risultato seguente:

Soci ordinari presenti e votanti 13:

Spampinato Nicolò, voti 10,
Miranda Carlo, voti 2,
Caccioppoli Renato, voti 1.

Il presidente proclama eletto vice-presidente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche per l'anno 1955 il socio Nicolò Spampinato, avvertendo che a norma dell'art. 14 dello Statuto il risultato della votazione sarà comunicato al Ministro della Pubblica Istruzione per l'approvazione del Capo dello Stato.

Si passa quindi, con le medesime norme, alla elezione di soci per i posti vacanti nelle diverse categorie.

Il segretario comunica che nell'adunanza di Sezione del 15 maggio 1954, quella di Scienze matematiche decise alla unanimità di non avanzare

alcuna proposta per il posto di socio ordinario residente e di coprire invece due dei tre posti di socio corrispondente attualmente vacanti.

Su invito del presidente, il socio Spampinato legge la relazione sui requisiti scientifici del prof. Alfredo Franchetta, titolare di Geometria analitica nell' Università di Palermo, ed il socio Caccioppoli dà lettura del rapporto sui titoli del prof. Guido Stampacchia, titolare di analisi matematica nell' Università di Genova, proposti dalla Sezione quali candidati a socio corrispondente. Quindi il presidente domanda ai soci ordinari presenti all' adunanza se abbiano a proporre altri nomi. Non essendo state fatte altre proposte, i due candidati predetti sono ammessi separatamente a votazione per scrutinio segreto, ottenendo 13 voti favorevoli su 13 soci ordinari presenti e votanti.

Il segretario dà notizia delle proposte fatte dalla Sezione di Scienze Naturali nell' adunanza del dì 6 novembre 1954. Il socio Pierantoni legge il rapporto sui titoli del prof. Giuseppe Catalano, ordinario di Botanica nell' Università di Napoli, proposto a voti unanimi quale candidato a socio ordinario residente in quella Sezione; ed il socio Salfi riferisce sui requisiti del prof. Mario Galgano, ordinario di Istologia ed Embriologia nello stesso Ateneo, ugualmente proposto alla unanimità dalla Sezione per la nomina a socio corrispondente. Non avendo alcuno dei presenti chiesto, su domanda del presidente, di integrare la lista con altri nomi, i due candidati sono ammessi, l' uno dopo l' altro, alla votazione per scrutinio segreto. Entrambi hanno ottenuto 13 voti favorevoli sopra 13 soci ordinari presenti e votanti.

Il presidente proclama pertanto eletti:

il prof. Alfredo Franchetta e il prof. Guido Stampacchia soci corrispondenti nella sezione di Scienze matematiche;

il prof. Giuseppe Catalano socio ordinario residente nella sezione di Scienze naturali, ed il prof. Mario Galgano socio corrispondente nella stessa Sezione.

A norma dell' art. 14 dello Statuto, la nomina del prof. Catalano sarà comunicata al Ministero della Pubblica Istruzione per la prescritta approvazione da parte del Capo dello Stato.

Infine l' Accademia vota, alla unanimità, la conferma del socio Antonio Scherillo a Tesoriere dell' Accademia per il triennio 1955-1957.

Processo verbale dell' adunanza del dì 4 dicembre 1954.

Presiede il presidente Colamonico, essendo presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Caccioppoli, Carrelli, Catalano, De Lorenzo, D' Erasmo, Giordani, Imbò, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, ed i corrispondenti Franchetta, Galgano, Orrù. Segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 6 novembre, che è approvato. Indi comunica:

1) la lettera del prof. Giuseppe Catalano, che ringrazia l'Accademia per la sua nomina a Socio ordinario residente, e quelle dei proff. Mario Galgano, Alfredo Franchetta e Guido Stampacchia, che esprimono la loro riconoscenza per la nomina a soci corrispondenti;

2) la Ministeriale 18 novembre 1954, n. 12565, relativa alla istituzione — ad opera della Confederazione Generale dei Professionisti della Repubblica Argentina — del Premio America « Juan Peron ». — L' Accademia prende atto;

3) la richiesta di cambio del Rendiconto accademico con gli *Annales de l' Université Marie Curie Sklodowska* di Lublino. L' Accademia acconsente.

Dà quindi notizia delle principali deliberazioni adottate dal Consiglio Generale della Società nella tornata del 13 novembre scorso, parlando specialmente della preparazione, pressochè ultimata, dello schedario dei Periodici esistenti nelle Biblioteche pubbliche di Napoli. Sentite le dichiarazioni del Presidente, che illustra il piano finanziario di questa pubblicazione vivamente desiderata dagli studiosi, ed elenca i contributi a tal uopo stanziati dalle consorelle Accademie e da altri Enti napoletani, l' Accademia ad unanimità decide di contribuire alla stampa del Catalogo predetto con una assegnazione, sul proprio bilancio, di lire duecentomila.

La Commissione Caccioppoli, Spampinato e Zappa riferisce sui due lavori presentati al concorso al premio biennale accademico per gli anni 1953-54 su tema di matematica, concludendo con la proposta di assegnare il premio a quello — contrassegnato dal motto « Chi spera, vive » — che ha per titolo *Sopra gli elementi modulari in un gruppo G, finito.* — L' Accademia approva alla unanimità la relazione, che sarà pubblicata nel Rendiconto e le cui conclusioni diverranno definitive nell' adunanza plenaria del gennaio 1955.

Viene pure approvato, per il nuovo concorso al premio accademico relativo al biennio 1955-1956, il seguente tema proposto dalla Sezione di Scienze naturali: « *Ricerche sulla morfologia comparata dei metameri negli Artropodi* » e si fissa, con le norme consuete, la scadenza, per la presentazione dei lavori, al 31 ottobre 1956.

La Commissione D' Erasmo, De Lorenzo e Scherillo riferisce sulla nota del dott. Vincenzo Minieri, *Aspetti geochimici di una particolare trasformazione del carbonato in fosfato di calcio nella grotta della « Zinzulusa »* (*Lecce*), proponendone l' inserzione nel Rendiconto.

Uguale parere esprimono la Commissione Galli, Miranda e Tolotti nei riguardi della nota del dott. Tullio Renzulli, *Sul calcolo delle strutture monodimensionali in regime elastoplastico*, e la Commissione Tolotti, No-

bile e Miranda per la nota del prof. Francesco Stoppelli, *Una generalizzazione di un teorema di Da Silva.*

L' Accademia approva alla unanimità l' accoglimento dei tre lavori predetti.

Il socio Imbò presenta una nota del dott. Pio Vittozzi, *Sul solarigrafo di Gorczynski N° 327.* — Il presidente incarica i soci Imbò, Carrelli e D' Erasmo di riferire su di essa nella prossima tornata.

Constatata la presenza del numero legale per la elezione di soci ai posti attualmente vacanti, il segretario comunica che nell' adunanza del 4 dicembre la Sezione di Scienze Naturali ha deciso alla unanimità di proporre alla Classe, per la nomina a socio corrispondente, il nome del prof. Francesco Cennamo, titolare di Fisica nell' Accademia di Aeronautica di Nisida. Il socio Carrelli legge il rapporto sui titoli del candidato, ed il presidente chiede ai soci ordinari presenti se abbiano da aggiungere altri nomi. In mancanza di altre proposte, il nome del prof. Cennamo viene votato a scrutinio segreto, ottenendo 15 voti favorevoli su 15 soci ordinari presenti e votanti.

In conseguenza, il Presidente proclama eletto il prof. Francesco Cennamo socio corrispondente nella Sezione di Scienze naturali.

INDICE

G. D'Erasmo — Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche durante l'anno 1953 . . . . . pag. 3

N. Spampinato — Su alcune varietà dell'S_{11} determinate dall'algebra triduale come sottoalgebra dell'algebra dei numeri doppio-biduali . . . . » 10

P. Balsimelli — Una trasformazione quadratica biduale e la relativa trasformazione cremoniana nell'S_5 ambiente della congruenza Γ . . . . » 25

G. De Lorenzo — Himâlaya nell'arte e nella scienza . . . . . » 31

V. Franciosi — Contributo alla teoria generale delle linee d'influenza . . » 47

N. Spampinato — Su alcune varietà dell'S_{23} complesso determinate dall'algebra dei numeri quadriduali come sottoalgebra dei numeri triplo-biduali . . » 57

R. Barbatelli — Determinazioni di ascensione retta del pianetino Vesta e dei pianeti Urano e Giove . . . . . » 79

M. Moncharmont Zei — I foraminiferi della scogliera a *Cladocora caespitosa* della Punta delle Pietre Nere presso il lago di Lesina, in provincia di Foggia (*con 3 tavole*) . . . . . » 83

F. Mazzarella — Determinazione delle componenti di secondo ordine della deformazione riferite ad un generico sistema di coordinate curvilinee . . » 107

A. Fadini — La risoluzione delle equazioni di secondo e terzo grado nell'algebra dei numeri triduali . . . . . » 111

A. Lazzari — La sedimentazione dei terreni in facies di flysch secondo le antiche osservazioni di R. Zuber (con alcune considerazioni sul flysch dell'Italia meridionale) . . . . . » 127

V. Minieri — Ricerche geochimiche su alcune bauxiti di Terra d'Otranto . . » 140

G. De Lorenzo — Tempo e spazio nel pensiero di Leopardi . . . . » 150

N. Spampinato — Sulla V_8^7 dell'S_{11} contenente tutte le $V_5^{2(n+m)}$ rispondenti alle curve di ordine n e classe m dell'S_2 . . . . . » 157

U. Sardi — Equazioni di secondo e terzo grado nell'algebra di Study. Radici ennesime di un numero di Study . . . . . » 166

V. Minieri — Aspetti geochimici di una particolare trasformazione del carbonato in fosfato di calcio nella grotta della « Zinzulusa » (Lecce) . . . . » 174

G. Dainelli — Termini stratigrafici locali della regione Etiopica (*Sunto della memoria inserita nel volume in corso degli Atti*) . . . . . pag. 180

N. Spampinato — La varietà V_{22} dell'S_{39} complesso determinata da una Vh_3 dell'S_4 prolungata nell'S_4 cinqueduale . . . . . » 181

P. Vittozzi — Sul solarigrafo di Gorczynski N. 327 . . . . . » 197

T. Renzulli — Sul calcolo delle strutture monodimensionali in regime elastoplastico . . . . . » 208

F. Stoppelli — Una generalizzazione di un teorema di Da Silva . . . . » 214

Concorso al premio biennale accademico per gli anni 1955-1956 . . . . » 225

Relazione della Commissione giudicatrice per il concorso al premio biennale 1953-1954 . . . . . » 226

Processi verbali delle adunanze dell'anno 1954 . . . . . » 228

Indice . . . . . » 241

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. Pierantoni
(Autorizzazione del Tribunale di Napoli n. 10186 del dì 14 agosto 1954)